

Jahresbericht
über
das Gymnasium zu Lemgo

vom Direktor Dr. Steusloff.



Voran geht eine mathematische Abhandlung:

„Ueber das simultane Formensystem einer Form 2ter und 6ter Ordnung“
vom ordentlichen Lehrer Dr. v. Gall,

Lemgo 1874.
Gedruckt bei F. L. Wägener.

LZ 56.40 Sep.

L2 56.4° - 1873/74

Sep.

Ueber das simultane Formensystem einer Form 2ter und 6ter Ordnung.

Zunächst werde ich das simultane, vollständige Formensystem dieser zwei binären Formen aufstellen, die überflüssigen Formen ausscheiden und die restirenden in einer etwas übersichtlicheren Weise darstellen. Dann werde ich zeigen, wie zwischen den vielen hier auftretenden Invarianten, mit Hilfe eines bekannten Determinantensatzes, Relationen aufgefunden werden können und zum Schlusse werde ich eine der vielen möglichen, typischen Darstellungen geben. — Ein eingehenderes Studium der binären Formen siebenter Ordnung, bei welchen, nach der von Gordan aufgestellten Theorie der vollständigen Formensysteme binärer Formen, das simultane System einer quadratischen Covariante 2ter und 6ter Ordnung aufzustellen wäre, hat mich veranlaßt gerade die simultanen Bildungen dieser Ordnungen zu untersuchen, obgleich sich in der Theorie der Formen 7ter Ordnung in Folge des Zusammenhangs zwischen den genannten Covarianten und der Grundform wesentlich andere und einfachere Resultate ergeben. Die folgende Untersuchung schließt sich an die, von meinem hochverehrten Lehrer, dem, leider der Wissenschaft zu früh entrißenen, Herrn Professor Dr. Clebsch angewandten Methoden und an die scharfsinnigen Untersuchungen dieses und meines Lehrers, des Herrn Professor Dr. Gordan, über algebraischen Formen an.

§. 1.

Simultane Invarianten und Covarianten.

Ich entnehme den „binären Formen“ des Herrn Professor Dr. Clebsch 1872 folgende Zusammenstellung der zum vollständigen System einer binären Form 6. Ordnung gehörigen Formen (pag. 296)

Ordnung:

Grad	0	2	4	6	8	10	12
1				$f = a_x^6$			
2	$A = (ab)^6$		$i = (ab)^4 a_x^2 b_x^2$		$H = (ab)^2 a_x^4 b_x^4$		
3		$l = (ai)^4 a_x^2$		$p = (ai)^2 a_x^4 i_x^2$	$\theta = (ai) a_x^5 i_x^3$		$T = (f, H)$
4	$B = (ii')^4$		$(f, l)_2 = g$	$r = (f, l)$		$\Sigma = (H, i)$	
5		$m = (i, l)^2$	$h = (i, l)$		$A = (H, l)$		
6	$A_{II} = (II')^2$			$s = (p, l)$ $t = [(f, i), l]_2$			
7		$n = (i, m)$	$K = (f, l^2)_3$				
8		$v = (l, m)$					
9			$j = [(f, i), l^2]_4$				
10	$D = (f, l^3)_6$	$\mu = (n, l)$					
12		$\lambda = (m, n)$					
15	$R = [(fi, l^4)]_8$						

Die quadratische Form sei:

$$x = \alpha_x^2 = \beta_x^2 = \gamma_x^2 = \dots\dots\dots$$

und ihre Invariante:

$$E = (\alpha \alpha^1)^2 = (\beta \beta^1)^2 = \dots\dots\dots,$$

so besteht das vollständige Formensystem beider Formen zuerst aus den 26 Bildungen der Form 6. Ordnung und den 2 letztgenannten der quadratischen Form.

Da das System sechster Ordnung nur Formen gerader Ordnung enthält, so braucht man, um das simultane System zu vervollständigen, nur die Ueberschiebungen von φ und von Potenzen φ über die einzelnen Formen des Systems 6. Ord. zu bilden. Es kommen also nach folgenden Bildungen hinzu:

die erste und zweite Ueberschiebung von φ über $l, m, n, \mu, \nu, \lambda$;

die erste und zweite Ueberschiebung von φ und die 3te und 4te von φ^2 über i, g, h, k, j ;

die erste und 2te Ueberschiebung von φ , die 3te und 4te von φ^2 , die 5te und 6te von φ^3 über f, p, r, s, t ;

die erste und 2te von φ , die 3te und 4te von φ^2 , die 5te und 6te von φ^3 und die 7te und 8te von φ^4 über H, Θ, A ;

die $(2q - 1)$ te und die $2q$ te von φ^q über Σ für $q = 1, 2, 3, 4, 5$;

endlich die $(2q - 1)$ te und $2q$ te Ueberschiebung von φ^q über T für $q = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Bezeichnen wir der Kürze halber die $(2q - 1)$ te und $2q$ te Ueberschiebung von φ^q über eine Form X mit X_{2q-1} und X_{2q} , so können wir sofort $\nu_1, \mu_1, \lambda_1, h_1, r_1, s_1, \Theta_1, A_1, \Sigma_1$ und T_1 auslassen, da die Formen ν, μ, λ u. s. w. Functionaldeterminanten sind, ihre ersten Ueberschiebungen mit φ also zerfallen. Dasselbe läßt sich aber leicht noch von einer großen Reihe anderer Bildungen nachweisen. Zu diesen gehört h_3 nach einem von Clebsch gegebenen Satze (binäre Formen pag 195) über Ueberschiebungen von Formen 2. Ord. über Functionaldeterminanten.

Da K in der symbolischen Schreibweise die Gestalt

$$(al)^2 (al') a_x^3 l'_x$$

annimmt, so kann man K_1 durch das Glied der Ueberschiebung:

$$(al)^2 (al')^1 (a\alpha) a_x^2 l'_x \alpha_x$$

Mit Anwendung einer bekannten Identität wird dieses Glied aber gleich der Summe:

$$(al)^2 a_x^2 \left\{ \frac{1}{2} (al')^2 \alpha_x^2 + \frac{1}{2} (a\alpha)^2 l'_x^2 - \frac{1}{2} (al')^2 a_x^2 \right\} = \frac{1}{2} \varphi. \Psi + \frac{1}{2} l. G_2 - \frac{1}{2} g. l_2.$$

Es besteht also aus lauter zerfallenden Theilen, kann also ausgelassen werden. K_3 ist ersetzbar durch das Glied:

$$(al)^2 (al') (a\alpha)^2 (a\beta) \beta_x l'_x.$$

Da nach derselben Identität (binäre Formen S. 15)

$$(al)^2 (al') (a\alpha)^2 (a\beta) \beta_x l'_x = \frac{1}{2} (al)^2 (a\alpha)^2 \left\{ (al')^2 \beta_x^2 + (a\beta)^2 l'_x^2 - (l'\beta)^2 a_x^2 \right\} = \varphi. \Psi + l. g_4 - l_2. g_2,$$

so ist es aus demselben Grunde auszulassen.

Es läßt sich ferner leicht nachweisen, daß j bis auf Glieder, welche außer Invarianten noch h und k enthalten, in der Form $(ai) (al)^2 (al')^2 a_x i_x^3$ darstellbar ist. Wir brauchen daher nur die Ueberschiebungen von φ über diesen Term zu untersuchen. Wir können daher j ersetzen durch den Theil:

$$(ai) (al)^2 (al')^2 (a\alpha) i_x^3 \alpha_x.$$

Da nach der Identität (II § 15 der bin. For.)

$$\begin{aligned} [(ai) (al)^2 (al')^2 (a\alpha) i_x^3 \alpha_x &= \frac{1}{2} (al)^2 (al')^2 i_x^2 \cdot \left\{ (ai)^2 \alpha_x^2 + (a\alpha)^2 i_x^2 - (i\alpha)^2 a_x^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \varphi. \Psi + i. \Psi - i_2. X, \end{aligned}$$

so fällt auch diese Ueberschiebung aus.

Ebenso j_3 , da diese Ueberschiebung ersetzbar ist durch:

$$(ai) (al)^2 (al)^2 (ia)^2 (i\beta) a_x \beta_x = \\ - \frac{1}{2} (al)^2 (al)^2 (ia)^2 \left\{ (ia)^2 \beta_x^2 + (i\beta)^2 a_x^2 - (a\beta)^2 i_x^2 \right\} = \varphi \cdot \Phi + i_4 \cdot \Psi - i_2 \cdot X.$$

Wie h_3 fallen auch die Ueberschiebungen r_3 und r_5 , s_3 und s_5 , θ_3 , θ_5 und θ_7 , A_3 , A_5 , A_7 , T_3 , T_5 , T_7 , T_{11} , Σ_3 , Σ_5 , Σ_7 und Σ_7 aus.

Es läßt sich ferner in der Theorie der Formen 6. Ordnung leicht nachweisen, daß $t = (\theta)^2 \theta_x^6$ bis auf die Covariante s ersetzbar ist durch das Glied $(ai) (il)^2 a_x^5 i_x$.

Wir können daher t_1 durch das Glied der Ueberschiebung $(ai) (il)^2 (ia) a_x^5 \alpha_x$ ersetzen. Dieses wird aber nach der schon oft angewandten Identität =

$$- \frac{1}{2} (il)^2 a_x^4 \left\{ (ia)^2 \alpha_x^2 + (i\alpha)^2 a_x^2 - (a\alpha)^2 i_x^2 \right\}$$

und ist daher auszulassen.

Für t_3 nehmen wir das Glied der Ueberschiebung $(ai) (il)^2 (i\beta) (a\alpha)^2 a_x^3 \beta_x =$

$$- \frac{1}{2} (il)^2 (a\alpha)^2 a_x^2 \left\{ (ia)^2 \beta_x^2 + (i\beta)^2 a_x^2 - (a\beta)^2 i_x^2 \right\}.$$

Ebenso nehmen wir für t_5 das Glied der Ueberschiebung

$$(ai) (il)^2 (a\alpha)^2 (a\beta)^2 (i\gamma) a_x \gamma_x = - \frac{1}{2} (il)^2 (a\alpha)^2 (a\beta)^2 \left\{ (ia)^2 \gamma_x^2 + (i\gamma)^2 a_x^2 - (a\gamma)^2 i_x^2 \right\}.$$

t_3 und t_5 sind daher auszulassen, weil sie aus lauter zerfallenden Theilen bestehen.

Die restirenden rein simultanen Formen werde ich nunmehr in einer etwas übersichtlicheren und für specielle Fälle vortheilhafteren Weise darstellen, indem ich den Nachweis liefern werde, daß sie die Coefficienten der quadratischen Form φ nur in den Symbolen der Formen $f_1, f_2, \dots, f_6$ enthalten. Von den Formen f_i ist dies selbstverständlich. Da ferner $H = (ab)^2 a_x^4 b_x^4$, so ist H , durch das Glied der Ueberschiebung $(ab)^2 (a\alpha) a_x^3 b_x^4 \alpha_x$ ersetzbar. Durch eine bekannte Identität (binäre Formen § 15, I) wird aber aus diesem Term:

$$(ab) (a\alpha) a_x^3 b_x^4 \left\{ (a\alpha) b_x - (b\alpha) a_x \right\} = (ab) (a\alpha)^2 a_x^3 b_x^5 - (ab) (a\alpha) (b\alpha) a_x^4 b_x^4.$$

Von diesen Gliedern verschwindet das zweite, da es durch Vertauschen von a mit b das Zeichen ändert, identisch; das erste ist $\{f_2, f\}_1$.

H_1 ist daher durch $\{f_2, f\}_1$, H_2 sofort durch das Glied $(ab)^2 (a\alpha)^2 a_x^2 b_x^4 = \{f_2, f\}_2$ ersetzbar. Für H_3 nehmen wir den Theil der Ueberschiebung $(ab)^2 (a\alpha)^2 (b\beta) a_x^2 b_x^3 \beta_x$, woraus durch Identität II

$$- \frac{1}{2} (ab) (a\alpha)^2 a_x b_x^3 \left\{ (ab)^2 \beta_x^2 + (b\beta)^2 a_x^2 - (a\beta)^2 b_x^2 \right\} = - \frac{1}{2} \left[\{f_2, f\}_3 + \frac{1}{2} \left[\{f_4, f\}_1 \right] \right]$$

wird, da das mittlere Glied identisch verschwindet, weil es durch Vertauschen von a mit b und α mit β das Vorzeichen ändert. Das Glied $\{f_2, f\}_3$ ist bis auf einen Zahlenfactor durch i_1 ersetzbar. Denn es ist $(ab)^3 a_x b_x^3 a_y^2 = \varphi \cdot (xy) i_x^3 i_y$, mithin $(ab)^3 (a\alpha)^2 a_x b_x^3 = - \varphi \cdot (i\alpha) i_x^3 \alpha_x$.

Die 2 simultanen Formen H_3 und i_1 sind daher durch $\{f_2, f\}_3$ und $\{f_4, f\}$, zu ersetzen.

H_4 gibt das Glied $(ab)^2 (a\alpha)^2 (a\beta)^2 b_x^4 = \{f_4, f\}_2$. Für H^5 nehmen wir den

Theil der Ueberschiebung $(ab)^2 (a\alpha)^2 (b\beta)^2 (a\gamma) a_x b_x^2 \gamma_x$, woraus durch Identität 1:

$$(ab) (a\alpha)^2 (b\beta)^2 (a\gamma)^2 a_x b_x^3 - (ab) (a\alpha)^2 (b\beta)^2 (a\gamma) (b\gamma) a_x^2 b_x^2$$

wird. Von diesen Gliedern verschwindet das zweite, da es durch Vertauschen von a mit b und α mit β , das Zeichen ändert. Für das erste, mithin für H_5 , ist aber $\{f_4, f_2\}_1$ zu setzen. H_6 gibt so fort $\{f_4, f_2\}_2$. Für H_7 nehmen wir den Theil der Ueberschiebung

$$(ab)^2 (a\alpha)^2 (b\beta)^2 (a\gamma) (b\gamma) (ad) b_x \delta_x = (ab) (a\alpha)^2 (b\beta)^2 (a\gamma) (b\gamma) (ad) b_x \{ (ad) b_x - (bd) a_x \}.$$

Das letzte Glied verschwindet, das erste gibt die 2. Ueberschiebung von $(a\alpha)^2 (ad)^2 (a\gamma) a_x \gamma_x$ über $(b\beta)^2 b_x^4$, nämlich: $\{f_5, f_2\}_2$. H_8 gibt $\{f_4, f_4\}_2$.

Gehen wir zu den von $i = (ab)^4 a_x^2 b_x^2$ abgeleiteten Formen über. Für i , fanden wir

$$\{f_2, f\}_3 \cdot i_2 \text{ gibt das Glied der Uebersch. } \{f_2, f\}_4. \text{ Für } i_3 \text{ setzen wir den Theil } (ab)^4 (a\alpha) (b\alpha) (a\beta) b_x \beta_x = \frac{1}{2} (ab)^3 (a\alpha) (b\alpha) \cdot \{ (ab)^2 \cdot \beta_x^2 + (a\beta)^2 \cdot b_x^2 - (b\beta)^2 a_x^2 \}.$$

Das erste Glied verschwindet, das letzte ist dem 2. entgegengesetzt gleich. Das mittlere Glied ist aber die vierte Ueberschiebung von $(a\beta)^2 (a\alpha) a_x^3 \alpha_x$ über b_x^6 . Demnach i_3 durch $\{f_3, f\}_4$ aber durch $\{f_2, f_2\}_4$ ersetzbar. Nach bekannten Sätzen über Polarenbildung (vergl. binäre Formen § 8 und Gordan über Resultanten, III. Band der math. Annalen) ist:

$$(a\alpha) a_x \alpha_x a_y^4 = f_{1,x}^2 f_{1,y}^4 - \frac{2}{3} (xy) f_{2,x} f_{2,y}^3, \text{ mithin}$$

$$(a\alpha) (ab)^4 a_x \alpha_x = (f_1, i)_4 + \frac{2}{3} (f_2, i)_3 \text{ oder } l_1 = (f_1, i)_4 + \frac{2}{3} (f_2, i)_3.$$

Wir müssen also l_1 durch eine Summe zweier Ueberschiebungen ersetzen, von denen jede den im Anfang gestellten Ansprüchen genügt. l_2 gibt sofort $\{f_2, i\}_4$. Da ferner $m = (il)^2 i_x^2$, so ist $m = (il)^2 (i\alpha) i_x \alpha_x$. Nun ist aber $(i\alpha) (i_x \alpha_x i_y^2 = i_{(1)x}^2 i_{(1)y}^2 - \frac{1}{2} i_{(2)x} i_{(2)y} (xy)$, woraus $(i\alpha) (il)^2 i_x \alpha_x = \{i_1, l\}_2 + \frac{1}{2} \{i_2, l\}_1$ oder mit Berücksichtigung der Darstellungen von i_1 und i_2 : $m_1 = \{(f_2, f)_3, l\}_2 + \frac{1}{2} \{(f_2, f)_4, l\}_1$.

$$\text{Ebenso erhält man, da } n = (im)^2 i_x^2 \text{ ist, } n_1 = \{(f_2, f)_3, m\}_2 + \frac{1}{2} \{(f_2, f)_4, m\}_1.$$

$$\text{Sofort erhält man: } m_2 = (i_2, l)_2, n_2 = (i_2, m)_2 \text{ oder: } m_2 = \{(f_2, f)_4, l\}_2, n_2 = \{(f_2, f)_4, m\}_2.$$

Aus den Covarianten μ, ν, λ ergeben sich nur die 3 Invarianten μ_2, ν_2, λ_2 . Da $\nu = (lm) l_x m_x$, so stellt sich $\nu_2 = (lm) (l\alpha) (m\alpha)$ als die zweite Ueberschiebung von l_1 über m dar, ebenso $\mu_2 = (nl) (n\alpha) (l\alpha)$ als die 2. Ueberschiebung von l_1 über n und $\lambda_2 = (mn) (m\alpha) (n\alpha)$ als die 2. Ueberschiebung von m_1 über n . Es enthalten also alle diese letztgenannten Formen die Coefficienten von φ nur in den Symbolen der Formen f_i .

Außer den aus den quadratischen Covarianten abgeleiteten Formen nehmen nur noch die aus den biquadratischen sich ergebenden Formen einen etwas complicirteren Character an, wenn man sie in der angegebenen Weise darstellen will. Es ist $g = (al)^2 a_x^4$, mithin: $g = (al)^2 (a\alpha) a_x^3 \alpha_x = (a\alpha)^2 (al) a_x^3 l_x - (al) (a\alpha) (l\alpha) a_x^4 = (f_2, l)_1 - (f, l_1)_2$. g_2 wird $(f_2, l)_2$.

$$g_3 = (al)^2 (a\alpha)^2 (a\beta) a_x \beta_x = (a\alpha)^2 (a\beta)^2 (al) a_x l_x - (a\alpha)^2 (a\beta) (al) (l\beta) a_x^2 \text{ wird zu } (f_4, l)_1 - (f_2, l_1)_2; \text{ ebenso } g_4 \text{ zu } (f_4, l)_4. \text{ Da } h = (il) i_x^3 l_x, \text{ so wird } h_2 = (il) (i\alpha)^2 i_x l_x =$$

$= (i_2, l)_I$ und $h^4 = (il) (i\alpha)^2 (i\beta) (l\beta) = (i_2, l_1)_2$. Ebenso, weil $K = (al)^2 (al^1) a_x^3 l_x^1$, so ist $K_2 =$ dem Theil $(al)^2 (al^1) (a\alpha)^2 a_x l_x^1 = (f_2, l^2)_3$ und $K_4 = (al)^2 (al^1) (a\alpha)^2 (a\beta) (l^1\beta) = (g_2, l_1)_2$. Leicht ergibt sich, daß $j_2 = (\theta_2, l^2)_3$ und $j_4 = (\theta_4, l^2)_3$ ist. Von θ_2 und θ_4 werden wir sogleich nachweisen, daß sie den Anforderungen genügen. Da $\theta = (ai) a_x^5 i_x^3$, so ist θ_2 ersetzbar durch $(ai) (a\alpha)^2 a_x^3 i_x^3 = (f_2, i)_I$, θ_4 durch $(f_4, i)_I$, θ_6 durch $(ai) (a\alpha)^2 (a\beta)^2 (a\gamma) (i\gamma) i_x^2 = (f_5, i)_2$ oder auch durch $(ai) (a\alpha)^2 (a\beta)^2 \cdot (i\gamma)^2 a_x i_x = (f_4, i_2)_I$, θ_8 durch:

$$(ai) (a\alpha)^2 (a\beta)^2 (i\gamma)^2 (a\delta) (i\delta) = (f_4, i_3)_2.$$

Da $p = (ai)^2 a_x^4 i_x^2$ so setzen wir für p_1 den Theil $(ai)^2 (a\alpha) a_x^3 i_x^2 \alpha_x$. Es ist nun: $(a\alpha) a_x^3 \alpha_x a_y^2 = f_1, x^4 y^2 - \frac{1}{3} (xy) f_2, x^3 y$, mithin: $(a\alpha) (ai)^2 a_x^3 \alpha_x i_x^2 = p_1 = (f_1, i)_2 - \frac{1}{3} (f_2, i)_I$. Das letzte Glied war θ_2 . Ebenso ist p_2 zu ersetzen durch $(ai)^2 (a\alpha)^2 a_x^2 i_x^2 = (f_2, i)_2$, p_3 durch $(ai)^2 (a\alpha)^2 (a\beta) a_x i_x^2 \beta_x = (f_3, i)_2 + \frac{1}{3} (f_4, i)_I$, wovon das letzte Glied schon bei θ_4 auftrat.

p_4 liefert das Glied der Ueberschiebung:

$(ai)^2 (a\alpha)^2 (a\beta)^2 i_x^2 = (f_4, i)_2$, p_5 aber $(ai)^2 (a\alpha)^2 (a\beta)^2 (i\gamma) i_x \gamma_x = (a\alpha)^2 (a\beta)^2 (ai) (i\gamma) (a\gamma) i_x^2 - (a\alpha)^2 (a\beta)^2 (ai) (i\gamma)^2 i_x a_x = - (f_5, i)_2 - (f_4, i_2)_I$, von welchen eines bei θ_6 auftrat. p_6 endlich gibt $(ai)^2 (a\alpha)^2 (a\beta)^2 (i\gamma)^2 = (f_2, i_2)_2$. Da $T = (aH) a_x^5 H_x^7$, so ist T_2 zu ersetzen durch $(aH) (a\alpha)^2 a_x^3 H_x^7 = (f_2, H)_I$, T_4 durch $(f_4, H)_I$, T_6 durch $(H_6, f)_I = \{ (f_4, f_2)_2, f \}_I$, T_8 durch $(aH) (a\alpha) (H\alpha) (H\beta)^2 (H\gamma)^2 (H\delta)^2 a_x^4 = (H_7, f)_2$, T_{10} durch $(aH) (H\alpha)^2 (H\beta)^2 (H\gamma)^2 (H\delta) (a\delta) (a\alpha)^2 a_x^2 = (H_7, f_2)_2$, T_{12} durch $(H_7, f_4)_2$. Ebenso gibt Σ_2 den Theil der Ueberschiebung $(H_2, i)_I$, Σ_4 aber $(H_4, i)_I$; Σ_6 führt auf $(H_6, i)_I$, Σ_8 auf $(Hi) (H\alpha)^2 (H\beta)^2 (H\gamma)^2 (i\delta)^2 H_x i_x = (H_6, i_2)_I$ und Σ_{10} auf $(H_6, i_3)_2 = \{ (f_4, f_2)_2, (f_3, f)_4 \}_2$. Da $r = (al) a_x^5 l_x^1$ so können wir für $r_2 = (f_2, l)_I$ für $r_4 = (f_4, l)_I$ und für $r_6 = (al) (a\alpha)^2 (a\beta)^2 (a\gamma) (l\gamma)$ setzen. Der letzte Ausdruck liefert die 2. Ueberschiebung von $(a\alpha)^2 (a\beta)^2 (a\gamma) a_x \gamma_x$ über l_x^2 , nämlich: $(f_5, l)_2$. Da $\mathcal{A} = (Hl) H_x^7 l_x^1$, so ist $\mathcal{A}_2$ ersetzbar durch den Theil der Ueberschiebung (H_2, l) , $\mathcal{A}_4$ durch (H_4, l) , $\mathcal{A}_6$ durch (H_6, l) , $\mathcal{A}_8$ durch den Theil $(Hl) (H\alpha)^2 (H\beta)^2 (H\gamma)^2 (H\delta) (l\delta)$ welcher gleich der 2. Uebersch. von $(H\alpha)^2 (H\beta)^2 (H\gamma)^2 H_x^2$ über $(l\alpha) l_x \alpha_x$ ist, so daß H_8 ersetzbar durch $(H_6, l)_I$. Da $s = (pl) p_x^5 l_x^1$, so ist $s_2 = (p_2, l)$, $s_4 = (p_4, l)$, $s_6 = (p_4, l)_2$ und weil $t = (\theta l)^2 \theta_x^6$, so liefert $t_2 \dots (\theta_2, l)_2$, $t_4 \dots (\theta_4, l)^2$, $t_6 \dots (\theta_6, l)^2$. Hermit haben wir alle Formen in einer Weise dargestellt, daß sie die Coefficienten von q nur in den Symbolen fi enthalten oder doch wenigstens nur in den Symbolen von Formen, von denen wir jenes schon nachgewiesen haben. Wir werden jedoch bei den Invariantenrelationen die vollen Ueberschiebungen statt der Theil gebrauchen.

Das vollständige, simultane Formensystem besteht nunmehr aus den 26 Formen der Form 6ter Ordnung, den 2 Formen der quadratischen Form und 71 rein simultanen Formen, welche die Coefficienten beider Formen enthalten, im Ganzen aus 99 Formen. Von diesen sind 27 Invarianten. Es ist einleuchtend, daß zwischen diesen vielen Formen eine große Menge von algebraischen Beziehungen statt finden muß. Da z. B. von den 27 Invarianten nur $7 + 3 - 4 + 1 = 7$ von einander unabhängig sind, so müssen zwischen diesen 20 von einander unabhängige, algebraische Gleichungen aufgefunden werden können. Wir wollen uns darauf beschränken, einige dieser letzteren aufzustellen.

§ 2.

Invariantenrelationen.

Es ist nach einem bekannten Determinantensatz (vergl. die Determinanten von Dr. R. Baltzer § 10):

$$\begin{array}{cccc}
 (ab) & (ac) & (ad) & (ae) \\
 & (bc) & (bd) & (be) \\
 & & (cd) & (ce) \\
 & & & (de)
 \end{array}
 \begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & &
 \end{array}
 = \begin{vmatrix}
 a_1^{n-1} & a_1^{n-2} a_2 & a_1^{n-3} a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\
 b_1^{n-1} & & & & b_2^{n-1} \\
 \vdots & & & & \\
 \vdots & & & & \\
 \vdots & & & & \\
 \vdots & & & &
 \end{vmatrix}$$

wenn die Anzahl aller Symbole $a, b, \dots = n$ ist. Multipliciren wir diese Identität mit einer ähnlichen, geschrieben mit den Symbolen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, nachdem wir die Horizontalreihen der 2ten Determinante rechts abwechselnd mit $+1$ und -1 und der Reihe nach mit den Binominalcoefficienten multiplicirt haben, so erhalten wir auf der rechten Seite, durch Multiplication der zwei n gliedrigen Determinanten, bis auf einen Zahlenfactor:

$$\begin{vmatrix}
 (a\alpha)^{n-1} & (a\beta)^{n-1} & (a\gamma)^{n-1} & \dots & \dots & \dots \\
 (b\alpha)^{n-1} & (b\beta)^{n-1} & (b\gamma)^{n-1} & \dots & \dots & \dots \\
 (c\alpha)^{n-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \vdots & & & & & \\
 \vdots & & & & & \\
 \vdots & & & & & \\
 \vdots & & & & &
 \end{vmatrix}$$

Auf drei Symbole angewandt, erhalten wir die von Clebsch zu ähnlichen Zwecken gebrauchte Determinantenrelation:

$$2 \cdot \begin{vmatrix}
 (ab) & (ac) & (bc) \\
 (\alpha\beta) & (\alpha\gamma) & (\beta\gamma)
 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
 (a\alpha)^2 & (a\beta)^2 & (a\gamma)^2 \\
 (b\alpha)^2 & (b\beta)^2 & (b\gamma)^2 \\
 (c\alpha)^2 & (c\beta)^2 & (c\gamma)^2
 \end{vmatrix}$$

(Vergleiche schon: Sulla Rappresentazione tipica in den Annali di Matematica 1867). Setzen wir aber $c = x$ und $\gamma = y$, so erhalten wir die gebräuchlichere Form des Ausdrucks:

$$2 (ab) a_x b_x \cdot (a\beta) a_y \beta_y = \begin{vmatrix} (a\alpha)^2 & (a\beta)^2 & a_y^2 \\ (b\alpha)^2 & (b\beta)^2 & b_y^2 \\ \alpha_x^2 & \beta_x^2 & (xy)^2 \end{vmatrix},$$

welche Clebsch dazu benutzt hat, um die Quadrate und Producte bestimmter Covarianten und Invarianten mehrerer simultanen Formen 2. Ordnung darzustellen. (binäre Formen § 58). Wie dort könnte man auch hier sofort die Quadrate und Producte der Invarianten ν_2 , μ_2 und λ_2 als eine ganze algebraische Function anderer Invarianten des vollständigen Systems ausdrücken. Wir wollen aber die erhaltene Determinantenidentität sofort zur Darstellung complicirter Invariantenrelationen benutzen.

Multiplirciren wir die Identität

$$2 (al) (a\alpha) (l\alpha) \cdot (bl') (b\beta) (l'\beta) = \begin{vmatrix} (ab)^2 & (al')^2 & (a\beta)^2 \\ (lb)^2 & (ll')^2 & (l\beta)^2 \\ (ab)^2 & (l'\alpha)^2 & (a\beta)^2 \end{vmatrix}$$

dergestalt mit $(a\gamma)^2$ $(a\delta)^2$ $(b\epsilon)^2$ $(b\xi)^2$ daß wir die erste Horizontalreihe der Determinante mit $(a\gamma)^2$ $(a\delta)^2$, die erste Verticalreihe derselben mit $(b\epsilon)^2$ $(b\xi)^2$ multipliciren, so erhalten wir:

$$2 r^2 = \begin{vmatrix} H_8 & g_4 & f_6 \\ g_4 & A_{11} & l_2 \\ f_6 & l_2 & E \end{vmatrix}, \text{ da wir,}$$

wie bewiesen, für $H_8 = (f_4, f_4)_2$ setzen dürfen.

Gehen wir von der Identität

$$2 (il) i_x l_x \cdot (i'l') i'_y l'_y = \begin{vmatrix} (ii')^2 & (il')^2 & i_y^2 \\ (li')^2 & (ll')^2 & l_y^2 \\ i_x^2 & l_x^2 & (xy)^2 \end{vmatrix}$$

aus, setzen für $x_1 = +\alpha_2$, $x_2 = -\alpha_1$ und eben so für y β , multipliciren auf beiden Seiten mit $(i\gamma)^2$ $(i\delta)^2$ und zwar die erste Horizontalreihe mit $(i\gamma)^2$, die erste Verticalreihe der großen Determinante mit $(i'\delta)^2$, so erhalten wir:

$$2 h^2 = \begin{vmatrix} (i_2, i'_2)^2 & m_2 & i_4 \\ m_2 & A_{11} & l_2 \\ i_4 & l_2 & E \end{vmatrix}.$$

Die Invariante $(i_2, i'_2)_2$ ist noch durch unsere Fundamentalformen auszudrücken. Aus der Theorie der Formen sechster Ordnung ist bekannt, daß:

$$(ii')^2 i_x^2 i'_x^2 = J_x^4 = \frac{1}{2} g_x^4 - \frac{A}{8} i \text{ ist.}$$

Durch Polarbildung erhalten wir hieraus:

$$(ii')^2 i_x^2 i'_y^2 = \frac{1}{2} g_x^2 g_y^2 - \frac{A}{8} i_x^2 i_y^2 + \frac{1}{3} (xy)^2 B;$$

ersetzen wir die x durch α , die y durch β (auf die bekannte Weise: $x_1 = \alpha_2$, $x_2 = -\alpha_1$), so ist:

$$(ii')^2 (ia)^2 (i'\beta)^2 = (i_2, i'_2)_2 = \frac{1}{2} g_4 - \frac{1}{6} A \cdot i_4 + \frac{1}{3} B \cdot E.$$

Analog erhalten wir:

$$2. (al)^2 (al') (a\alpha)^2 (a\beta) (l'\beta) \cdot (bl'')^2 (bl''') (b\gamma)^2 (b\delta) (l'''\delta) \equiv$$

$$\begin{vmatrix} (ab)^2 & (al''')^2 & (ad)^2 \\ (bl')^2 & (l'l''')^2 & (l'\delta)^2 \\ (b\beta)^2 & (l'''\beta)^2 & (\delta\beta)^2 \end{vmatrix} \cdot (al)^2 (a\alpha)^2 \cdot (bl'')^2 (b\gamma)^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} (g_2, g'_2)_2 & (al''')^2 & (al)^2 & (a\alpha)^2 & g_4 \\ (bl')^2 & (bl'')^2 & (b\gamma)^2 & A_{II} & l_2 \\ g_4 & l_2 & E & & \end{vmatrix}.$$

Nach der Theorie der Formen 6. Ord. ist aber: (vergl. bin. For. pag 454)

$$(al)^2 (al')^2 a_x^2 = -\frac{2}{3} B l + \frac{1}{3} A \cdot m + 2n, \text{ mithin } (al)^2 (al')^2 (a\alpha)^2 = -\frac{2}{3} B \cdot l_2 + \frac{1}{3} A \cdot m_2 + 2n_2.$$

Um $(g_2, g'_2)_2$ zu bilden, nehmen wir aus den Formen 6. Ord. die Relation $g_x^4 = 2A + \frac{1}{3} i$

(bin. For. pag 285). Schieben wir g 2mal über sich selbst, so erhalten wir

$$(gg')^2 g_x^2 g'_x^2 = \frac{1}{3} A \cdot (Ai)_2 + 4 (AA')^2 + \frac{A^2}{9} A,$$

Es ist nun aus der Theorie der Formen 4. Ord. bekannt, daß:

$$(Ai)_2 = i \cdot A, (AA')^2 = -\frac{B}{6} A + i C \text{ ist. Mit Berücksichtigung dieser Formel und der Gleichung } A = \frac{1}{2} g - \frac{A}{6} i \text{ erhalten wir: } (gg')^2 g_x^2 g'_x^2 = i \left(\frac{2}{9} A \cdot B + \frac{1}{3} C - \frac{A^3}{54} \right) - g \left(\frac{1}{3} B + \frac{A^2}{18} \right).$$

Bezeichnen wir für den Augenblick die rechte Seite mit φ_x^4 , so erhalten wir durch Polarenbildung:

$$(gg')^2 g_x^2 g_y^2 = \varphi_x^2 \varphi_y^2 + \frac{1}{3} (xy)^2 (gg')^4 = \varphi_x^2 \varphi_y^2 + \frac{1}{3} (xy)^2 \left(\frac{2}{3} B^2 + \frac{1}{3} A C + \frac{1}{9} A^2 B \right) \text{ (siehe binäre Formen pag 295).}$$

Ersetzen wir darin die x durch α und die y durch β , so ergibt sich endlich:

$$(g_2, g'_2)_2 = i_4 \left(\frac{2}{9} A B + \frac{1}{3} C - \frac{A^3}{54} \right) - g_4 \left(\frac{1}{3} B + \frac{A^2}{18} \right) + \frac{1}{3} E \left(\frac{2}{3} B^2 + \frac{1}{3} A C + \frac{1}{9} A^2 B \right).$$

Setzen wir diese Werthe in die letzte 3gliedrige Determinante ein, so ist:

$$2 K_4^2 = \begin{vmatrix} i_4 \left[\frac{2}{9} A B + \frac{1}{3} C - \frac{A^3}{54} \right] & -\frac{2}{3} B l_2 + \frac{1}{3} A m_2 + 2n_2 & g_4 \\ -g_4 \left(\frac{1}{3} B + \frac{A^2}{18} \right) & + \frac{1}{3} E \left(\frac{2}{3} B^2 + \frac{1}{3} A C + \frac{1}{9} A^2 B \right) & \\ -\frac{2}{3} B l_2 + \frac{1}{3} A m_2 + 2n_2 & A_{II} & l_2 \\ g_4 & l_2 & E \end{vmatrix}$$

Wenn sich auch das Quadrat von j_4 nicht auf ähnliche Weise durch andere Invarianten darstellen läßt, so hält es doch nicht schwer auch für derartige, aus Functional-determinanten (hier Θ) gebildete Invarianten entsprechende Relationen aufzufinden.

Wir gehen zu dem Ende von der Identität aus

$$2 (ai) a_x i_x \cdot (bi') b_y i'_y = \begin{vmatrix} (ab)^2 & (ai')^2 & a_y^2 \\ (ib)^2 & (ii')^2 & i_y^2 \\ b_x^2 & i_x^2 & (xy)^2 \end{vmatrix}$$

Durch Polarenbildung erhalten wir nun:

$$(ai) a_x i_x \cdot i_x^2 a_z^4 = \theta_x^4 \theta_z^4 - \frac{3}{2} (xz) p_x^3 p_z^3 - \frac{1}{2} (xz)^3 l_x l_z.$$

Multiplizieren wir daher die Determinantenidentität mit $i_x^2 a_z^4 i_y^2 b_t^4$ dergestalt, daß wir die erste Horizontalreihe der großen Determinante mit a_z^4 , die zweite mit i_ξ^2 , die erste Verticalreihe mit b_t^4 , die zweite mit i'_η^2 multiplizieren, so erhalten wir

$$2 (ai) a_x i_x \cdot i_\xi^2 a_z^4 \cdot (bi') b_y i'_y \cdot i'_\eta^2 b_t^4 = \begin{vmatrix} (ab)^2 a_z^4 b_t^4 & (ai')^2 a_z^4 i'_\eta^2 & a_z^4 a_y^2 \\ (ib)^2 b_t^4 \cdot i_\xi^2 & (ii')^2 i_\xi^2 i'_\eta^2 & i_y^2 i_\xi^2 \\ b_x^2 \cdot b_t^4 & i_\xi^2 i'_\eta^2 & (xy)^2 \end{vmatrix}$$

Erfetzen wir hierin die z durch die φ , wo $\varphi_x^4 = l_x^2 \cdot l'_x^2$ und die t durch die ψ , wo $\psi_x^4 = l''_x^2 \cdot l'''_x^2$ ist, so erhalten wir aus der linken Seite:

$$2 (ai) (al)^2 (al')^2 \cdot a_x i_x \cdot i_\xi^2 \cdot (bi') (bi'')^2 (bi''')^2 b_y i'_y i'_\eta^2.$$

Um diesen Ausdruck zu bilden, ersetzen wir in der obigen Identität (ai) $a_x i_x^3 a_z^4 = u$ f.w. die z durch die φ , wo $\varphi_x^4 = l_x^2 \cdot l'_x^2$, so erhalten wir:

$$(ai) (al)^2 (al')^2 a_x i_x^3 = j_x^4 + \frac{3}{2} (pl)^2 (pl') p_x^3 l'_x.$$

Aus den Formen 6. Ord. haben wir aber:

$$(pl)^2 p_x^4 = \left(\frac{B}{3} - \frac{A^2}{18} \right) i + \frac{A}{6} g - \frac{l^2}{18} \text{ (bin. For. pag 295) und durch nochmalige Uebersch. mit } l:$$

$$(pl)^2 (pl') p_x^3 l'_x = \frac{1}{3} \left\{ h \left(B - \frac{A^2}{6} \right) + \frac{A}{2} K \right\}; \text{ daher bekommen wir endlich:}$$

$$(ai) (al)^2 (al')^2 a_x i_x^3 = X_x^4 = j_x^4 + \frac{1}{2} \left[h \left(B - \frac{A^2}{6} \right) + \frac{A}{2} K \right].$$

Hieraus bilden wir uns die Polare:

$$(ai)(al)^2(al')^2 a_x i_x i_\xi^2 = X_x^2 X_\xi^2 + \frac{1}{2} (x\xi) \Phi_x \Phi_\xi, \text{ wo } \Phi_x^2 = (al)^2 (al')^2 (ai)^2 i_x^2 = -\frac{2}{3} B \cdot m + \frac{A}{3} n + 2q = \frac{B}{3} m + \frac{A}{3} n + \frac{2}{3} C l, \text{ welcher Ausdruck sich aus der Darstellung}$$

von $(f l^2)_4$ (pag 454 bin. For.) so fort ergibt. Mit Berücksichtigung der Werthe von Φ und X , erhalten wir endlich für die linke Seite der obigen Determinantenidentität:

$$(ai) (al)^2 (al')^2 a_x i_x i_\xi^2 = j_x^2 j_\xi^2 + \frac{1}{2} (h_x^2 h_\xi^2 (B - \frac{A^2}{6}) + \frac{A}{2} K_x^2 K_\xi^2) + \frac{1}{2} (x\xi) \cdot \left[\frac{A}{3} n_x n_\xi + \frac{B}{3} m_x m_\xi + \frac{2}{3} C l_x l_\xi \right]$$

mal einem analogen Ausdruck geschrieben mit h, i', l', l'', y, η mal 2. Wir wollen nun in dieser Identität die x durch α , die y durch β und die ξ und η resp. durch γ und δ in der bekannten Weise ersetzen, so erhalten wir aus der linken Seite derselben:

$$2 \left[j_4 + \frac{1}{2} \left\{ h_4 \left(B - \frac{A^2}{6} \right) + \frac{A}{2} K_4 \right\} \right]^2$$

Setzen wir auf der rechten Seite für x, y, z, t, ξ, η dieselben Werthe ein und bezeichnen mit G_{in} das Glied, welches in der i ten Vertical- und n ten Horizontalreihe der Determinante steht, so haben wir:

$$G_{11} = (ab)^2 (al)^2 (al')^2 (bl'')^2 (bl''')^2, \text{ welches die 2te Ueberschiebung von } [l, l^2]_4 = -\frac{2}{3} B l + \frac{A}{3} m + 2 n \text{ mit sich selbst ist, also} = \frac{4}{3} B^2 A_{11} - \frac{2}{3} A B A_{1m} - \frac{4}{3} B A_{1n} - \frac{2}{3} A B A_{1m} + \frac{A^2}{9} A_{mm} + \frac{2}{3} A A_{mn} - \frac{4}{3} B A_{ln} + \frac{2}{3} A A_{mn} + 4 A_{nn}.$$

Setzen wir hierin die Werthe von A_{lm} u. s. w. ein, wie sie sich in der Theorie der Formen 6. Ordnung ergeben (bin. For. pag 299), so erhalten wir:

$$G_{11} = \frac{8}{27} (A B + 6 C) (B^2 + A C) + \frac{1}{9} D (6 B + A^2).$$

Für $G_{12} = G_{21}$ finden wir ferner $(ai)^2 (al)^2 (al')^2 (i\alpha)^2$. Da aber, wie oben bewiesen, $(ai)^2 (al)^2 (al')^2 i_x^2 = \frac{A}{3} n + \frac{B}{3} m + \frac{2}{3} C$. l ist, so haben wir so fort:

$$G_{12} = G_{21} = \frac{A}{3} n_2 + \frac{B}{3} m_2 + \frac{2}{3} C \cdot l_2.$$

$$G_{13} = G_{31}, \text{ ergibt } -\frac{2}{3} B l_2 + \frac{A}{3} m_2 + 2 n_2.$$

Für G_{22} haben wir, die schon untersuchte Form $(ii')^2 (i\alpha)^2 (i\beta)^2 = \frac{1}{2} g_4 - \frac{1}{6} A \cdot i_4 + \frac{B}{3} \cdot E$.

G_{33} endlich ist E. So daß wir die Invariantenrelation bekommen:

$$2 (j_4 + \frac{1}{2} [h_4 (B - \frac{A^2}{6}) + \frac{A}{2} K_4])^2 = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix}, \text{ worin}$$

wir für $G_{11} \dots$ die oben berechneten Werthe setzen müssen. Wir sehen hier den bemerkenswerthen Fall, daß nicht j_4 , sondern diese Invariante, vermehrt um ein Aggregat anderer Invarianten, als forme gauche auftritt. Ähnliche Eigenschaften besitzen die aus s und t abgeleiteten Formen t_6 und s_6 und zwar sind diese beiden Formen in der für sie entwickelten Relation, nur durch einen Zahlenfactor additiv verbunden. Um die in Rede stehende Relation zu entwickeln, gehen wir von der Determinantenidentität aus:

$$2 \begin{vmatrix} (ai) a_x i_x & (al)^2 a_\xi^2 i_\eta^2 \\ (bi) b_y i_y & (bl)^2 b_\xi^2 i_\eta^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (ab)^2 (ai')^2 a_y^2 & (al)^2 a_\xi^2 \\ (ib)^2 (ii')^2 i_y^2 & : i_\eta^2 \cdot (bi')^2 b_\xi^2 \\ b_x^2 i_x^2 (xy)^2 & : i_\eta^2 \end{vmatrix}.$$

Durch Polarenbildung erhalten wir:

$$(ai) a_x^3 i_x^3 \cdot a_y^2 = \Theta_x^6 \Theta_y^2 - \frac{3}{4} (xy) p_x^5 p_y \text{ und hieraus } (ai) (al)^2 a_x^3 i_x^3 = t_x^6 + \frac{3}{4} s_x^6.$$

Durch denselben Proceß ergibt sich ferner hieraus, mit Berücksichtigung daß:

$$(ai)^3 (al)^2 a_x i_x \equiv 0_x : (ai) (al)^2 a_x^2 i_x^2 a_y i_y = t_x^4 t_y^2 + \frac{3}{4} s_x^4 s_y^2 \text{ und ebenso:}$$

$$[(ai) (al)^2 a_y i_y] a_x^2 i_z^2 = t_x^2 t_z^2 t_y^2 + \frac{3}{4} s_x^2 s_z^2 s_y^2 + (xz) \psi_x \psi_z,$$

$$\text{wo } \psi_x^2 = (ai)^2 (al)^2 a_y i_y a_x i_x \text{ ist.}$$

Nun ist (bin. For. pag 295 Formel 8 und 7):

$$(ai)^2 (al)^2 a_x^2 i_x^2 = \frac{B i + \frac{A}{3} (g - A i)}{\frac{2}{3}} = \frac{i (B - A^2) + g \cdot A}{\frac{2}{3}}, \text{ woraus sofort:}$$

$$(ai)^2 (al)^2 a_x i_x a_y i_y = \frac{i_x^2 i_y^2 (B - \frac{A^2}{6}) + g_x^2 g_y^2 \cdot \frac{A}{2}}{3} - \frac{1}{6} (xy)^2 \cdot A_{II}$$

Setzen wir diesen Werth von ψ_x^2 ein, so ergibt sich:

$$(ai) (al)^2 a_x i_x a_{\xi}^2 i_{\eta}^2 = t_x^2 t_{\xi}^2 t_{\eta}^2 + \frac{3}{4} s_x^2 s_{\xi}^2 s_{\eta}^2 + (\xi\eta) \left\{ \frac{i_{\xi}^2 i_{\eta}^2 i_x^2 (B - \frac{A^2}{6}) + \frac{A}{2} g_{\xi}^2 g_{\eta}^2 g_x^2 - \frac{1}{2} (\xi x) (\eta x) A_{II}}{3} \right\}.$$

Ersetzen wir hierin in bekannter Weise die x, ξ, η resp. durch α, β, γ , so ist:

$$(ai) (al)^2 (a\alpha) (i\alpha) (a\beta)^2 (i\gamma)^2 = t_6 + \frac{3}{4} s_6 \text{ und die linke Seite unserer Determinantenidentität: } 2[t_6 + \frac{3}{4} s_6]^2.$$

Auf der rechten Seite multipliciren wir die erste und zweite Verticalreihe resp. mit $(bl')^2 b_{\zeta}^2$ und i'_{ρ}^2 , die 1. und 2. Horiz-Reihe mit $(al)^2 a_{\xi}^2$ und i_{η}^2 , so ist:

$$G_{11} = (ab)^2 (al)^2 (bl')^2 (a\alpha)^2 (b\beta)^2 = (g_2, g'_2)_2 = \frac{1}{54} (12 A B + 72 C - A^3) - \frac{1}{18} g_4 \cdot (6 B + A^2) + \frac{1}{9} (6 B^2 + 12 A C + \frac{1}{3} A^2 B); \text{ (vergl. die Darstellung von } 2 K_4^2). \\ G_{12} \text{ ist aber } (ai)^2 (al)^2 (a\alpha)^2 (i\beta)^2.$$

Wie oben erwähnt, ist aber:

$$(ai)^2 (al)^2 a_x^2 i_x^2 = \frac{i (B - \frac{A^2}{6}) + g A}{3}. \text{ Hieraus ergibt sich durch Polarenbildung:}$$

$$(ai)^2 (al)^2 a_x^2 i_y^2 = \frac{i_x^2 i_y^2 (B - \frac{A^2}{6}) + g_x^2 g_y^2 \frac{A}{2}}{3} + \frac{1}{3} (xy)^2 A_{II}.$$

Demnach:

$$G_{12} = \frac{1}{3} \left\{ i_4 (B - \frac{A^2}{6}) + g_4 \cdot \frac{A}{2} + E \cdot A_{II} \right\}; \text{ ferner:}$$

$$G_{22} = (i_2, i'_2)_2 = \frac{1}{2} g_4 - \frac{1}{6} A \cdot i_4 + \frac{B}{3} \cdot E; G_{12} = G_{21}; G_{13} = G_{31} = g_4; G_{33} = E;$$

$G_{23} = G_{32} = i_4$. Unsere Invariantenrelation lautet daher:

$$2[t_6 + \frac{3}{4} s_6]^2 = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix},$$

wo für G_{in} die eben gefundenen Werthe zu setzen sind.

Zwei Arten von Relationen mögen noch an Beispielen erläutert werden; und zwar will ich zuerst an einen speciellen Falle zeigen, wie man die Beziehungen zwischen den ganzen Ueberschiebungen und den im Anfang eingeführten Theilen aufstellen kann. Ich wähle zu diesem Zwecke den Theil $(f_4, f_4)_2$, welchen wir für die Ueberschiebung H_8 setzen dürfen. Durch Polarenbildung erhalten wir:

$$(ab)^2 a_x^4 b_y^4 = H_x^4 H_y^4 + \frac{1}{7} (xy)^2 i_x^2 i_y^2 + \frac{1}{5} (xy)^4 \cdot A.$$

Ersetzen wir die y durch die φ , wo $\varphi_x^4 = \alpha_x^2 \cdot \beta_x^2$, so wird:

$$(ab)^2 (b\alpha)^2 (b\beta)^2 a_x^4 = H_4 + \frac{1}{7} (i\varphi)^2 i_x^2 \varphi_x^2 + \frac{1}{5} \varphi_x^4 \cdot A;$$

Schieben wir die letzte Gleichung noch einmal über $\varphi_x^4 = \alpha_x^2 \cdot \beta_x^2$, so ergibt sich:

$$(ab)^4 (a\alpha)^2 (a\beta)^2 (b\gamma)^2 (b\delta)^2 = H_8 + \frac{1}{7} (i\varphi)^2 (i\varphi')^2 (\varphi\varphi')^2 + \frac{1}{5} (\varphi\varphi')^4 \cdot A.$$

Da $\alpha_x^2 \cdot \beta_y^2 = \varphi_x^2 \cdot \varphi_y^2 + \frac{1}{3} (xy)^2 \cdot E$, oder: $\varphi_x^2 \cdot \varphi_y^2 = \alpha_x^2 \cdot \beta_y^2 - \frac{1}{3} (xy)^2 E$, so können wir $\varphi_x^2 \cdot \varphi_y^2$ als quadratische Form in den y betrachten. Schieben wir es als solche einmal über sich selbst, so wird:

$$(\varphi\varphi')^2 \varphi_x^2 \varphi_y^2 = \frac{1}{3} \alpha_x^2 \beta_x^2 \cdot E = \frac{1}{3} E \cdot \varphi_x^4 \text{ und } (\varphi\varphi')^2 (\varphi i)^2 (\varphi' i)^2 = \frac{1}{3} i_4 \cdot E. \text{ Ferner ist:}$$

$$(\varphi\varphi')^4 = (\varphi\alpha)^2 \cdot (\varphi\beta)^2. \text{ Es ist aber: } (\varphi\alpha)^2 \varphi_x^2 = E \cdot \alpha_x^2 - \frac{1}{3} E \cdot \alpha_x^2 = \frac{2}{3} E \cdot \alpha_x^2, \text{ wenn wir in der Identität } \varphi_x^2 \cdot \varphi_y^2 \text{ u. s. w. die } y \text{ durch die } \alpha \text{ ersetzen. Mithin endlich}$$

$$(i_4, i_4)_2 = H_8 + \frac{4}{3} i_4 E + \frac{2}{15} A \cdot E^2.$$

Um aber auch umgekehrt H_8 durch Theile von Ueberschiebungen auszudrücken, müssen wir nach i_4 durch den dafür gesetzten Theil der Ueberschiebung ersetzen.

Zu dem Ende haben wir:

$$(ab)^4 a_x^2 b_y^2 = i_x^2 i_y^2 + \frac{1}{3} (xy)^2 A.$$

Ersetzen wir hierin in bekannter Weise die x durch α , die y durch β , so erhalten wir:

$$(ab)^4 (a\alpha)^2 (b\beta)^2 = i_4 + \frac{1}{3} E \cdot A, \text{ oder: } [f_2, f_2]_4 = i_4 + \frac{1}{3} E \cdot A, \text{ und umgekehrt:}$$

$$i_4 = (f_2, f_2)_4 - \frac{1}{3} E \cdot A.$$

Setzen wir den Werth von i_4 in der obigen Formel ein, so erhalten wir die Umkehrung:

$$H_8 = (f_4, f_4)_2 - \frac{4}{3} E \cdot (f_2, f_2)_4 + \frac{2}{15} A E^2.$$

Endlich wollen wir noch das Produkt zweier formes gauches durch andere Invarianten darstellen. Wir gehen zu dem Ende von der Determinantenidentität aus:

$$\begin{array}{cc} 2 (aH) a_x H_x & \\ (lm) l_y m_y & \end{array} = \begin{vmatrix} (al)^2 (am)^2 a_y^2 \\ (Hl)^2 (Hm)^2 H_y^2 \\ l_x^2 m_x^2 (xy)^2 \end{vmatrix},$$

worin wir für x wieder α und für y : β setzen:

$$\begin{array}{cc} 2 (aH) (a\alpha) (H\alpha) & \\ (lm) (l\beta) (m\beta) & \end{array} = \begin{vmatrix} (al)^2 (am)^2 (a\beta)^2 \\ (Hl)^2 (Hm)^2 (H\beta)^2 \\ (l\alpha)^2 (m\alpha)^2 (a\beta)^2 \end{vmatrix}.$$

Multiplizieren wir auf beiden Seiten mit $(a\gamma)^2 (a\delta)^2 (H\epsilon)^2 (H\zeta)^2 (H\theta)^2$ und zwar auf der rechten Seite dergestalt, daß wir die erste Horizontalreihe mit $(a\gamma)^2 (a\delta)^2$, die zweite aber mit $(H\epsilon)^2 (H\zeta)^2 (H\theta)^2$ multipliciren, so erhalten wir auf der linken Seite:

$$2 (aH) (a\alpha) (H\alpha) (a\gamma)^2 (a\delta)^2 (H\epsilon)^2 (H\zeta)^2 (H\theta)^2 \cdot v_2.$$

Um diesen Ausdruck zu bilden, gehen wir von folgender Polarenbildung aus:

$$\begin{aligned} (Ha) H_x^7 a_x a_y^4 &= -T_x^8 T_y^4 + \frac{7}{3} (xy) H_x^7 H_y^3 + \frac{126}{55} (xy)^2 H_x^6 H_y^2 \\ &+ \frac{7}{6} (xy)^3 H_x^5 H_y^1 + \frac{5}{18} (xy)^4 H_x^4 H_y^0, \end{aligned}$$

welche sich leicht aus den im § 8 der binären Formen entwickelten Principien ergibt und worin $H_x^{10} = (H f)_2$, $H_x^8 = (H f)_3$, $H_x^6 = (H f)_4$, $H_x^4 = (H f)_5$ bedeutet. Von diesen Formen finden wir H' schon in den binären Formen entwickelt (pag 449)

$$H' = \frac{3}{14} i. f.$$

Auch bei der Bildung der übrigen stößt man auf keine Schwierigkeiten. Um H'' zu erhalten, hat man die Polare: $(ab)^2 a_x^4 b_x b_y^3 = H_x^5 H_y^3 + \frac{6}{7} (xy)^2 i_x^3 i_y$, woraus so fort:

$$(ab)^2 (bc)^3 a_x^4 b_x c_x^3 = (Hc)^3 H_x^5 c_x^3 - \frac{6}{7} \Theta_x^8.$$

Es ist ferner: $(bc)^3 b_x c_x^3 b_y^2 = - (xy) i_x^3 i_y$ und: $(bc)^3 (ab)^2 b_x c_x^3 a_x^4 = - \Theta_x^8$;

Demnach: $H'' = - \frac{1}{7} \Theta_x^8$.

Ebenso leicht erhalten wir H''' , dessen Bestimmung ebenso wie die von H' für die weitere Ausführung allerdings unnötig wird: $(ab)^2 a_x^4 b_y^4 = H_x^4 H_y^4 + \frac{1}{7^2} (xy)^2 i_x^2 i_y^2 + \frac{1}{5} (xy)^4 A$ und hieraus: $(ab)^2 (ac)^4 b_x^4 c_x^2 = H''' + \frac{1}{7^2} p + \frac{1}{5} A. f.$

Nun ist: $(ac)^4 a_x^2 c_y^2 = i_x^2 i_y^2 + \frac{1}{5} (xy)^2 A$, und $(ac)^4 (ab)^2 c_x^2 b_y^4 = p + \frac{A}{5} f.$

Also haben wir: $H''' = \frac{1}{15} A. f - \frac{5}{7} p.$

Ferner nehmen wir die Polare: $(ab)^2 a_y^4 b_y' b_x^3 = H_x^3 H_y^5 + \frac{6}{7} (xy) i_x i_y^3$ und bekommen hieraus $(ab)^2 (ac)^4 (bc) b_x^3 c_x = H'''$.

Da aber auch $(ac)^4 a_x^2 c_x c_y = i_x^3 i_y$ und demnach $(ac)^4 (ab)^2 (cb) b_x^3 c_x = (ib)^3 i_x b_x^3 \equiv 0$, so ist endlich auch $H''' \equiv 0$.

Setzen wir nun für den Augenblick $q_x^4 = \psi_x^4 \cdot \psi'_x{}^4 = \alpha_x^2 \cdot \beta_x^2 \cdot \gamma_x^2 \cdot \delta_x^2$ und $\psi_x^4 = \lambda_x^2 \cdot \mu_x^2$ und in der obigen Identität: $(aH) H_x^7 a_x a_y^4 = u. f. w.$ für x und y resp. q und ψ , so erhalten wir sofort:

$$\begin{aligned} (Ha) (Hq)^7 (aq) (a\psi)^4 &= (Ha) (Ha)^2 (H\beta)^2 (H\gamma)^2 (H\delta) (a\delta) (a\epsilon)^2 (a\zeta)^2 \\ &= - T_{12} + \frac{7}{3} (q\psi) (H'q)^7 (H'\psi)^3 + \frac{1}{55} (q\psi)^2 (H'q)^6 (H'\psi)^2 \\ &\quad + \frac{7}{6} (q\psi)^3 (H'''q)^5 (H''' \psi) + \frac{1}{18} (q\psi)^4 (H'''q)^4. \end{aligned}$$

Von diesem Ausdruck können wir das letzte Glied auf der rechten Seite auslassen, da es mit H''' verschwindet. Die übrigen Theile sind leicht zu bilden. Sofort ist ersichtlich, daß $(q\psi)_1$ mit $(\alpha\beta) \alpha_x \beta_x$ identisch null ist. Um $(q\psi)_2$ zu bilden, gehen wir von der leicht zu entwickelnden Polare aus: $q_x^6 q_y^2 = \alpha_y^2 \cdot \beta_x^2 \delta_x^2 \epsilon_x^2 - \frac{3}{7} (xy)^2 \gamma_x^2 \delta_x^2 \cdot E$; woraus durch Ueberschiebung ψ_y^4 erhalten wird: $(q\psi)_2 = (\alpha\psi)^2 \psi_x^2 \cdot \beta_x^2 \delta_x^2 \epsilon_x^2 - \frac{3}{7} E. q$. Nun ist: $\lambda_x^2 \mu_y^2 = \psi_x^2 \psi_y^2 + \frac{1}{5} (xy)^2 E$, demnach: $(\mu\psi)^2 \psi_x^2 = E. \alpha_x^2 - \frac{1}{5} E. \alpha_x^2 = \frac{4}{5} E. \alpha_x^2$ und $(q\psi)_2 = \frac{2}{5} E. q - \frac{3}{7} E. q = \frac{1}{35} E. q$.

Differenziren wir die letzte Polare in Bezug auf x und ersetzen die Incremente durch y , so erhalten wir: $q_x^5 q_y^3 = a_y^2 \beta_y \beta_x \delta_x^2 \epsilon_x^2 - \frac{3}{7} (xy)^2 E. \gamma_x^2 \delta_x \delta_y$ und hieraus durch ersetzen der y durch die ψ oder durch Ueberschiebung mit ψ :

$(q\psi)^3 q_x^5 \psi_x = (\alpha\psi)^2 (\beta\psi) \psi_x \beta_x \delta_x^2 \epsilon_x^2 - \frac{2}{7} E (\delta\psi) \psi_x^3 \gamma_x^2 \delta_x \cdot (\delta\psi) \delta_x \psi_x^3$ verschwindet mit $(\delta\delta) \delta_x \delta'_x$ und da, wie soeben bewiesen, $(\alpha\psi)^2 \psi_x^2 = \frac{4}{5} E. \alpha_x^2$ ist, so ist auch: $(\alpha\psi)^2 (\psi\beta) \psi_x \beta_x \equiv 0$, mithin verschwindet auch $(q\psi)^3 q_x^4 \psi_x$ identisch.

Daher wird aus unserer obigen Identität $(Ha) (Ha) (a\alpha) (H\beta)^2 (H\gamma)^2 (H\delta)^2 (a\epsilon)^2 (a\zeta)^2 = - T_{12} + \frac{1}{55} \cdot \frac{5}{11} E. (H'q)^8$.

Da aber $H' = -\frac{1}{7} \Theta_X^8$ ist, so wird die rechte Seite $= -T_{12} - \frac{6}{7} \Theta_8 \cdot E$ und daher die linke Seite unserer großen Determinantenrelation: $-2 \cdot \nu_2 (T_{12} + \frac{6}{7} \Theta_8 \cdot E)$. Bezeichnen wir wieder die Glieder der auf der rechten Seite der eben genannten Relation stehende Determinante mit G_{in} so haben wir: $G_{11} = (a\alpha)^2 (a\beta)^2 (a\alpha)^2 = g_4$ und $G_{12} = (a\alpha)^2 (a\alpha)^2 (a\beta)^2$, welches die 4te Ueberschiebung von $(a\alpha)^2 a_X^4$ mit $\alpha_X^2 \cdot \beta_X^2$ ist. Nun ist nach der Theorie der Formen 6. Ord.

(vergl. bin. Form. pag 452) $(a\alpha)^2 a_X^4 = \frac{Bi + A\Delta}{3} + \frac{1}{2} l^2$, oder wenn wir Δ durch g ausdrücken:

$$(a\alpha)^2 a_X^4 = \frac{Bi + \frac{1}{2} A \cdot g - \frac{A^2}{6} i}{3} + \frac{1}{2} l^2.$$

Um die 4. Ueberschiebung dieses Ausdrucks mit $\alpha_X^2 \beta_X^2$ zu bilden, müssen wir noch die 4. Ueberschiebung von l^2 mit $\alpha_X^2 \beta_X^2$ untersuchen. Zu dem Ende haben wir: $l_X^2 \cdot l_Y^2 + (l_X^2)_X (l_Y^2)_Y + \frac{1}{3} (xy)^2 A_{II}$, mithin: $(l^2, \varphi^2)_4 = l_2^2 - \frac{1}{3} A_{II} \cdot E$; demnach endlich:

$$G_{12} = \frac{1}{3} B i_4 + \frac{1}{6} A g_4 - \frac{1}{18} A^2 i_4 + \frac{1}{2} l_2^2 - \frac{1}{6} A_{II} E.$$

G_{13} gibt sofort $(a\alpha)^2 (a\beta)^2 (a\gamma)^2 = f_6$.

G_{12} und G_{22} erfordern etwas Rechnung; es ist $G_{21} = (Hl)^2 (H\alpha)^2 (H\beta)^2 (H\gamma)^2$ die 6te Ueberschiebung von $(Hl)^2 H_X^6$ mit $\alpha_X^2 \beta_X^2 \gamma_X^2$. Nach der Theorie der Formen 6. Ord. (binäre

Form. pag 294) ist: $H_X^6 (Hl)^2 = \frac{Ap - Bf}{3} - \frac{2}{7} i l$.

Um die 4. Ueberschiebung von $il = \psi_X^6$ mit $\alpha_X^2 \beta_X^2 \gamma_X^2$ zu bilden, greifen wir zu der Polare: $i_X^4 l_Y^2 = \psi_X^4 \psi_Y^2 + \frac{4}{3} (xy) h_X^3 h_Y + \frac{2}{3} (xy)^2 m_X^2$, woraus: $i_X^4 (l\alpha)^2 = \psi_X^4 (\psi\alpha)^2 - \frac{4}{3} (h\alpha) h_X^3 \alpha_X + \frac{2}{3} m \cdot \varphi$.

Um $(\psi\alpha)^2 (\varphi\beta)^2 (\psi\gamma)^2$ zu erhalten, müssen wir diesen Ausdruck noch einmal über $\alpha_X^2 \beta_X^2$ schieben. Nennen wir $m \cdot \varphi$ für den Augenblick χ_X^4 , so ist: $m_X^2 \alpha_Y^2 = \chi_X^2 \chi_Y^2 - (xy) \xi_X \xi_Y + \frac{1}{3} (xy)^2 \cdot m_2$, worin $\xi_X^2 = (m\alpha) m_X \alpha_X$, mithin: $(m\beta)^2 (\alpha\gamma)^2 = (\chi\beta)^2 (\chi\gamma)^2 - (\beta\gamma) (\xi\beta) (\xi\gamma) + \frac{1}{3} m_2 \cdot E$. Das 2. Glied auf der rechten Seite verschwindet, da es durch Vertauschen von β und γ das Vorzeichen ändert und wir haben also: $(\chi\alpha)^2 (\chi\beta)^2 = \frac{2}{3} m_2 \cdot E$, demnach endlich:

$$(\psi\alpha)^2 (\psi\beta)^2 (\varphi\gamma)^2 = i_4 \cdot l_2 + \frac{4}{3} (h\alpha) (h\beta)^2 (h\gamma) (\alpha\gamma) - \frac{2}{3} m_2 \cdot E$$

oder, da das zweite Glied rechts verschwindet, $= i_4 l_2 - \frac{2}{3} m_2 E$. Mit Benutzung des gefundenen Werthes für $(il, \varphi^3)_6$ erhalten wir: $G_{21} = \frac{1}{3} A \cdot p_6 - \frac{1}{3} B f_6 - \frac{2}{7} (i_4 \cdot l_2 - \frac{2}{3} m_2 \cdot E)$.

Noch mehr Mühe macht die Bestimmung von $G_{22} = (Hm)^2 (H\alpha)^2 (H\beta)^2 (H\gamma)^2$.

Zu dem Ende haben wir die Polare: $H_X^6 H_Y^2 = (ab)^2 a_X^4 b_X^2 b_Y^2 - \frac{2}{7} (xy)^2 i_X^4$ und hieraus: $(Hm)^2 H_X^6 = (ab)^2 a_X^4 b_X^2 (bm)^2 - \frac{2}{7} i \cdot m$. Das 2. Glied rechts ist die 2. Ueber-

schiebung von $(bm)^2 b_X^4 = \frac{Bi + Ag - \frac{A^2}{6} i}{3} + \frac{1}{2} l^2$ mit a_X^6 . Wir müssen also noch die 2te Ueberschiebung von $l^2 = \psi_X^4$ mit a_X^6 untersuchen. Wir haben zu diesem Zweck die Polare: $l_X^2 \cdot l_Y^2 = \psi_X^2 \psi_Y^2 + \frac{1}{3} (xy)^2 A_{II}$ und demnach $(\psi a)^2 \psi_X^2 a_X^4 = g \cdot l - \frac{1}{3} A_{II} \cdot f$.

Tragen wir diesen Werth ein, so ist:

$$H_x^6 (Hm)^2 = \frac{1}{3} B p - \frac{A^2}{18} p + \frac{A}{6} \left\{ \frac{A p - B f}{3} - i l \right\} + \frac{1}{2} g \cdot l - \frac{1}{6} A_{11} \cdot f - \frac{2}{7} i m,$$

wenn wir berücksichtigen, wie leicht nachzuweisen, daß: $(ga)^2 g_x^2 a_x^4 = \frac{A p - B f}{3} - i l$ ist.

Ziehen wir in der letzten Gleichung die Glieder zusammen und bedenken, daß: $A_{11} = 2C + \frac{1}{3} AB$ ist, so erhalten wir: $H_x^6 (Hm)^2 = \frac{1}{3} p \cdot B - \frac{f}{9} \{ AB + 3C \} + \frac{A}{6} i l + \frac{1}{2} g \cdot l - \frac{2}{7} \cdot i m$.

Um nunmehr G_{22} zu finden, müssen wir noch die 6ten Ueberschiebungen von $i l$, $g l$ und $i m$ mit $\alpha_x^2 \beta_x^2 \gamma_x^2$ bilden. Dies erfordert einige Sätze über Formen 6. Ord. da $m = (i'l)^2 i_x'^2$ ist, so ist:

$$\begin{aligned} (im) i_x^3 m_x &= (i'l)^2 (i'') i_x^3 i'_x = (i'') (i'l) i_x^2 i'_x \{ (i'i) l_x - (li) i'_x \} \\ &= - (i'i)^2 (i'l) i_x^2 l_x i'_x + (i'') (il) (i'l) i_x^2 i'_x^2. \end{aligned}$$

Das letzte Glied rechts verschwindet, da es durch Vertauschen von i und i' das Vorzeichen ändert; das erste ist $-(il) A^3 l_x$; da aber $A = \frac{1}{2} g - \frac{A}{6} i$, so ist dies und mithin $(im) i_x^3 m_x = \frac{A}{6} h - \frac{1}{2} K$. Dies führt uns auf die Bildung der 6ten Ueberschiebung von im mit $\alpha_x^2 \cdot \beta_x^2 \gamma_x^2 = q^3$.

Mit Berücksichtigung der letzten Relation haben wir die leicht zu bildende Polare: $(i \cdot m = \psi)$
 $i_x^4 m_y^2 = \psi_x^4 \psi_y^2 + \frac{4}{3} (xy) \left\{ \frac{1}{6} A h_x^3 h_y - \frac{1}{2} K_x^3 K_y \right\} + \frac{2}{3} (xy)^2 n_x^2$ und hieraus:
 $i_x^4 (m\alpha)^2 = \psi_x^4 (\psi\alpha)^2 - \frac{4}{3} \left\{ \frac{A}{6} (h\alpha) h_x^3 \alpha_x - \frac{1}{2} (K\alpha) K_x^3 K_x \right\} + \frac{2}{3} \cdot \varphi \cdot n$. Ersetzen wir die x durch die ψ wo $\psi = \gamma_x^2 \cdot \beta_x^2$ ist und berücksichtigen daß $(h\alpha) (h\beta)^2 (h\gamma) (\alpha\gamma) \equiv 0$ und daß die 4. Ueberschiebung von $\varphi \cdot n$ mit $q^2 = \frac{2}{3} n_2 \cdot E$ ist, so erhalten wir hieraus:
 $\{ im, q^3 \}_6 = i_4 m_2 - \frac{2}{3} n_2 E$.

Auf ganz analoge Weise erhalten wir: $\{ il, q^3 \}_6 = i_4 l_2 - \frac{2}{3} m_2 E$.

Mit Berücksichtigung daß $(gl)_1 = K$ und $(gl)^2 g_x^2 = -\frac{2}{3} B l + \frac{A}{3} m + 2n$ (bin. Form. pag 454), erhalten wir die Polare: $(g \cdot l = \psi)$

$$g_x^4 l_y^2 = \psi_x^4 \psi_y^2 + \frac{4}{3} (xy) K_x^3 K_y + \frac{2}{3} (xy)^2 \left\{ -\frac{2}{3} B l_x^2 + \frac{A}{3} m_x^2 + 2 n_x^2 \right\}.$$

Hieraus ergibt sich: $g_x^4 (l\alpha)^2 = \psi_x^4 (\psi\alpha)^2 - \frac{4}{3} (K\alpha) K_x^3 \alpha_x + \frac{2}{3} \varphi \left(-\frac{2}{3} B l + \frac{A}{3} m + 2n \right)$; und schieben wir den letzten Ausdruck über $\beta_x^2 \gamma_x^2$, berücksichtigen daß $(K\alpha) (K\beta) (K\gamma)^2 (\alpha\beta) \equiv 0$ und die 4ten Ueberschiebungen von gl , gm , gn mit $\beta_x^2 \gamma_x^2$ resp. $\frac{2}{3} E l_2$, $\frac{2}{3} E m_2$, $\frac{2}{3} E \cdot n_2$ geben, so erhalten wir endlich: $(\psi\varphi^3)_6 = g_4 l_2 + \frac{4}{15} E \cdot B l_2 - \frac{2}{15} E A \cdot m_2 - \frac{4}{3} E \cdot n_2 = (gl, \varphi^3)_6$.

Setzen wir die jetzt gefundenen Werthe in die Identität $(Hm)^2 H_x^6 = u$. f. w. ein, nachdem wir in derselben die x durch χ , wo $\chi = \varphi^3$ ist, ersetzt haben, so ergibt sich nunmehr:

$$\begin{aligned} (Hm)^2 (H\alpha)^2 (H\beta)^2 (H\gamma)^2 &= G_{22} = \frac{1}{3} p_6 B - \frac{1}{6} f_6 \{ AB + 3C \} + \frac{1}{6} A \{ i_4 l_2 - \frac{2}{3} E m_2 \} \\ &- \frac{2}{7} (i_4 m_2 - \frac{2}{3} E n_2) + \frac{1}{2} (g_4 l_2 + \frac{4}{15} E B l_2 - \frac{2}{15} E A m_2 - \frac{4}{3} E n_2) = \frac{1}{3} p_6 B \\ &- \frac{1}{3} f_6 (AB + 3C) + \frac{1}{6} A i_4 l_2 - \frac{2}{15} A E m_2 - \frac{2}{7} i_4 m_2 - \frac{2}{7} E n_2 + \frac{1}{2} g_4 l_2 + \frac{2}{15} B E l_2. \end{aligned}$$

Für G_{23} finden wir sofort H_8 , für $G_{31} = l_2$, $G_{32} = m_2$, $G_{33} = E$.

Unsere Relation lauten daher:

$$- 2 v_2 (T_{12} + \frac{6}{7} \theta_8 \cdot E) = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix},$$

wo wir für die G_{in} die oben gefundenen Werthe einsetzen müssen. Auch hier zeigt sich wieder eine eigenthümliche Zusammengehörigkeit der Formen T_{12} und Θ_8 , welche die Formen T und Θ nicht hatten; es würde daher für manche Fälle empfehlenswerth sein, statt T_{12} die Form $T_{12} + \frac{6}{77} \Theta_8 E$ als Grundform des vollständigen Systems zu wählen. Dies ist bekanntlich der Theil der Ueberschiebung $[H_7, f_4]_2$, von welcher wir schon in der Einleitung gesagt haben, daß er in dem vollständigen System für T_{12} gesetzt werden darf.

Zum Schlusse wollen wir noch die Resultante der beiden Formen φ_x^2 und f_x^6 , wie sie Prof. Gordan im III. Band der math. Annalen pag 391 aufgestellt hat, in unserer Bezeichnung hinzufügen:

$$R = f_6^2 + \frac{1}{2} E \cdot H_8 + \frac{1}{7} E^2 i_4 + \frac{3}{26} E^3 \cdot A.$$

§ 3.

Typische Darstellung.

Wir haben hier im Ganzen 30 Covarianten 2. Ordnung, nämlich: $l, m, n, \lambda, \mu, \nu, \varphi, l_1, m_1, n_1, i_2, i_3, g_2, g_3, h_2, k_2, j_2, f_4, f_5, p_4, p_5, t_4, r_4, s_4, H_6, H_7, \Theta_6, A_6, \Sigma_8, T_{10}$. Wenn zwischen 3 von diesen quadratischen Covarianten keine lineare Relation statt findet, so kann man diese 3 zur typischen Darstellung wählen. Im Allgemeinen wird dies bei den 3 Covarianten $\varphi = \alpha_x^2$, l und l_1 auch der Fall sein. Von den vielen möglichen typischen Darstellungen wollen wir jene (durch φ, l und l_1) näher betrachten. Nachdem im § 104 der bin. For. aufgestellten Principien haben wir alsdann, da l_1 die Functional-determinante von φ und l ist:

$$\begin{aligned} a_x^6 \{ A_{11} \cdot E - l_2 \}^3 = \\ [(al')^2 (l \cdot E - \varphi \cdot l_2) + (a\alpha')^2 (\varphi \cdot A_{11} - l \cdot E) + 2 l_1 \cdot (al_1')^2] \\ \cdot [(al'')^2 (l \cdot E - \varphi \cdot l_2) + (a\alpha'')^2 (\varphi \cdot A_{11} - l \cdot E) + 2 l_1 (a l_1'')^2] \\ \cdot [(al''')^2 (l \cdot E - \varphi \cdot l_2) + (a\alpha''')^2 (\varphi \cdot A_{11} - l \cdot E) + 2 l_1 (a l_1''')^2]. \end{aligned}$$

Multiplirciren wir die Klammern aus, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} (al')^2 (al'')^2 (al''')^2 \{ l \cdot E - \varphi \cdot l_2 \}^3 + 3 (al')^2 (al'')^2 (l \cdot E - \varphi \cdot l_2)^2 \cdot (\varphi \cdot A_{11} - l \cdot E) \\ + 6 (al')^2 (al'')^2 (al_1')^2 \{ l \cdot E - \varphi \cdot l_2 \}^2 \cdot l_1 + 3 (al')^2 (a\alpha')^2 (a\alpha'')^2 \{ l \cdot E - \varphi \cdot l_2 \} \cdot \\ \cdot \{ \varphi \cdot A_{11} - l \cdot E \}^2 + 1 (al_1')^2 (al_1'')^2 (al_1''')^2 \{ l \cdot E - \varphi \cdot l_2 \} \cdot l_1^2 + (a\alpha')^2 \cdot (a\alpha'')^2 (a\alpha''')^2 \\ \{ \varphi \cdot A_{11} - l \cdot E \}^3 + 6 (a\alpha')^2 (a\alpha'')^2 (al_1')^2 \{ \varphi \cdot A_{11} - l \cdot E \}^2 \cdot l_1 + 12 (al_1')^2 (al_1'')^2 (a\alpha')^2 \\ \{ \varphi \cdot A_{11} - l \cdot E \} \cdot l_1^2 + 6 (al')^2 (a\alpha')^2 (al_1')^2 (l \cdot E - \varphi \cdot l_2) (\varphi \cdot A_{11} - l \cdot E) \cdot l_1 \\ + 8 l_1^3 (a l_1')^2 (a l_1'')^2 (a l_1''')^2. \end{aligned}$$

Wir wollen uns darauf beschränken, die hier auftretenden Invarianten-Coefficienten durch Invarianten des vollständigen Systems auszudrücken.

Bezeichnen wir den Coefficienten von $(IE - \varphi l_2) \mu \cdot (\varphi A_{ll} - IE)^v \cdot l_1^5$ (ohne die Zahlen Coefficienten) der Kürze halber mit $C_{\mu \nu \xi}$, so ist:

$$C_{300} = (al)^2 (al')^2 (al'')^2 = -\frac{2}{3} B \cdot A_{ll} + \frac{A}{3} A_{ml} + 2 A_{nl} = -\frac{4}{3} BC + \frac{2}{3} A^2 C + 2 D.$$

Ebenso findet man für $C_{210} = (al)^2 (al')^2 (aa)^2 = -\frac{2}{3} B l_2 + \frac{A}{3} m_2 + 2 n_2$.

Um C_{201} zu bilden müssen wir $(al)^2 (al')^2 a_x^2$ 2mal über $l_1 = (al'') \alpha_x l'_x$ schieben und es wird daher $C_{201} = -\frac{2}{3} B (al) (al') (ll') + \frac{A}{3} (al) (am) (lm) + 2 (al) (an) (ln)$. Da das erste Glied rechts verschwindet, so ist nunmehr: $C_{201} = \frac{A}{3} v_2 - 2 \mu_2$. Ferner ist: $C_{120} = g_4$. Um aber C_{102} zu bilden, schreiben es in der Form $(gl'_1)^2 (gl_1)^2$. Es ist aber $l_1 = (al) \alpha_x l'_x$, $l'_1 = (\beta l') \beta_x l'_x$, mithin $C_{102} = (ga) (g\beta) (gl) (gl') (al) (\beta l')$. Bilden wir uns die Polare: $(gl) (gl') g_x l'_x g_y l'_y$ und überlegen, daß $(gl) (gl')^2 g_x^2 l'_x l'_x = \frac{1}{2} g_x^2 (2 (gl)^2 \cdot l'^2 - (ll')^2 g_x^2) = (\psi_x^4) = (-\frac{2}{3} B \cdot l + A m + 2n) l - \frac{1}{2} A_{ll} \cdot g$ ist, so erhalten wir: $(gl) (gl') g_x l'_x g_y l'_y = \psi_x^2 \psi_y^2 - \frac{1}{6} (xy)^2 (g, l^2)_4$. In Bezug auf $\psi_x^2 \psi_y^2$ berücksichtigen wir, daß:

$$l_x^2 l_y^2 = (l^2)_x^2 (l^2)_y^2 + \frac{1}{3} (xy)^2 A_{ll'}$$

$$l_x^2 m_y^2 = (lm)_x^2 (lm)_y^2 + (xy) v_x v_y + \frac{1}{3} (xy)^2 A_{lm'}$$

$$l_x^2 n_y^2 = (ln)_x^2 (ln)_y^2 - (xy) \mu_x \mu_y + \frac{1}{3} (xy)^2 A_{ln'}$$

Setzen wir nun in der Polare $(gl) (gl') g_x l'_x g_y l'_y$ für x und y resp. α und β , so finden wir:

$$C_{102} = -\frac{2}{3} B [l_2^2 - \frac{1}{3} E \cdot A_{ll}] + \frac{A}{3} [l_2 \cdot m_2 - \frac{1}{3} E \cdot A_{lm}] + 2 [l_2 n_2 - \frac{1}{3} E \cdot A_{ln}] + A_{ln}] - \frac{1}{2} A_{ll} g_4 - \frac{1}{6} E (-\frac{2}{3} B A_{ll} + \frac{A}{3} A_{ml} + 2 A_{nl}),$$

da $(g, l^2)_4 = (al)^2 (al')^2 (al'')^2$ die 2. Ueberschiebung von $(al)^2 (al')^2 a_x^2$ mit l'^2_x ist. (Vergl. bin. Form. pag 454). Setzen wir hierin für A_{ml} u. f. w. die Werthe ein und ziehen zusammen, so wird endlich:

$$C_{102} = \frac{1}{9} E C (6 B - A^2) - \frac{2}{3} B l_2^2 - E D + \frac{A}{3} l_2 m_2 + 2 l_2 n_2 - \frac{1}{2} g_4 (2C + AB).$$

Ferner ist $C_{030} = f_6$. Um aber C_{012} zu bilden, gehen wir von der Identität aus: $(al) a_x = (aa) l_x - (la) \alpha_x$, woraus durch Multiplication mit $(la) (aa) : (la) (aa) (al) a_x = (aa)^2 (la) l_x - (la)^2 (aa) \alpha_x$. Analog haben wir: $(l'a) (\beta a) (\beta l') a_x = (\beta a)^2 (l'a) l'_x - (l'a)^2 (\beta a) \beta_x$. Multi-

pliciren wir die letzten Identitäten miteinander, so erhalten wir:

$$(la) (l'a) (aa) (\beta a) (al) (\beta l') a_x^2 = (aa)^2 (\beta a)^2 (la) (l'a) l_x l'_x - 2 (aa)^2 (l'a)^2 (la) (\beta a) l_x \beta_x + (la)^2 (l'a)^2 (aa) (\beta a) \alpha_x \beta_x = \frac{1}{2} (aa)^2 (\beta a)^2 \{ (la)^2 l_x^2 + (l'a)^2 l_x'^2 - (ll')^2 a_x^2 \} - (aa)^2 (l'a)^2 \{ (la)^2 \beta_x^2 + (\beta a)^2 l_x^2 - (l\beta)^2 a_x^2 \} + \frac{1}{2} (la)^2 (l'a)^2 \{ (aa)^2 \beta_x^2 + (\beta a)^2 a_x^2 - (\alpha\beta)^2 a_x^2 \},$$

und mit Hilfe bekannter Formeln: $= g_2 l_2 - \frac{1}{2} A_{ll} \cdot f_4 - \frac{1}{2} (-\frac{2}{3} B l + \frac{A}{3} m + 2 n) E$.

Ersetzen wir hierin die x durch α , so erhalten wir schließlich:

$$C_{012} = g_4 l_2 - \frac{1}{2} (2 C + AB) f_6 - \frac{1}{2} (-\frac{2}{3} B l_2 + \frac{A}{3} m_2 + 2 n_2).$$

Zur Bestimmung von C_{111} gehen wir von $(al)^2 (al')^2 a_x^2 = (gl_1)^2 g_x^2$ aus.

Es ist aber $(gl_1)^2 g_x^2 = (al) (ag) (lg) g_x^2 = (ag) (lg) g_x [(ag) l_x - (lg) a_x]$
 $= (ag)^2 (lg) l_x g_x - (lg)^2 (ag) a_x g_x = (gl)^2 (ga) g_x a_x - (ga)^2 (gl) g_x l_x$. Es ist aber
 $(gl)^2 (ga) g_x a_x = -\frac{2}{3} B l_1 + \frac{A}{3} m_1 + 2 n_1$, und $(gl) g_x l_x g_y^2 = K_x^2 K_y^2$
 $- \frac{1}{2} (xy) (g, l)^2_x (g, l)^2_y$, demnach: $(ga)^2 (gl) g_x l_x = K_2 + \frac{1}{2} ((g, l)^2, \alpha) \cdot (g, l)^2_x \cdot \alpha_x$.
 Also $(gl_1)^2 g_x^2 = \frac{1}{2} (-\frac{2}{3} B l_1 + \frac{A}{3} m_1 + 2 n_1) - (K\alpha)^2 K_x^2$, woraus, da $(l_1 \alpha)^2$
 $= (l\alpha) (l\beta) (\alpha\beta) \equiv 0$, schließlich: $C_{111} = -K_4$. Um endlich C_{003} zu bestimmen, überlegen wir
 daß, wie oben bei C_{012} gefunden, $(al_1)^2 (al_1 l_1)^2 a_x^2 = g_2 l_2 - \frac{1}{2} A_{II} f_4 - \frac{1}{2} (-\frac{2}{3} B l_1$
 $+ \frac{A}{3} m_1 + 2 n_1) E$ ist. Es ist daher $C_{003} = C_{111} \cdot l_2 - \frac{1}{2} A_{II} C_{021} - \frac{1}{2} (-\frac{2}{3} B (l_1)^2$
 $+ \frac{A}{3} (m_1)^2 + 2 (n_1)^2)$. Es ist aber $(l_1)^2 = (al) (al') (l'l) \equiv 0$ und $(l_1 m)^2 = (il)^2 (il_1)^2$.
 Um diesen Ausdruck zu bestimmen, gehen wir von der Identität aus: $(il_1)^2 i_x^2 = (al) (ai) (li) i_x^2$
 $= (il)^2 (ia) i_x a_x - (ia)^2 (il) i_x l_x$. Der erste Ausdruck rechts ist m_1 und der zweite ergibt sich aus:
 $(il) i_x l_x i_y^2 = h_x^2 h_y^2 - \frac{1}{2} (xy) m_x m_y$, indem man darin die y durch α ersetzt: $(il) (i\alpha)^2 i_x l_x$
 $= h_2 + \frac{1}{2} m_1$; mithin: $(il_1)^2 i_x^2 = \frac{1}{2} m_1 - h_2$. Hieraus erhalten wir durch Ueberschiebung mit
 l_x^2 : $(il_1)^2 (il)^2 = \frac{1}{2} (m\alpha) (ml) (al) - (h\alpha)^2 (hl)^2$. Der erste Term rechts ist $\frac{1}{2} \nu_2$ der zweite
 folgt aus der Polare: $(il) i_x^2 i_y l_y = h_x^2 h_y^2 + \frac{1}{2} (xy) m_x m_y$, wenn wir y durch l ersetzen:
 $(il) (il') (l'l) i_x^2 = (hl')^2 h_x^2 - \frac{1}{2} (ml) m_x l_x$, oder $(hl')^2 h_x^2 = -\frac{1}{2} \nu$ und endlich diese
 Gleichung über α_x^2 schieben: $(hl')^2 (h\alpha)^2 = -\frac{1}{2} \nu_2$. Demnach haben wir also: $(il_1)^2 (il)^2 = \nu_2$
 $= (ml_1)^2$. Analog erhalten wir: $(nl_1)^2 = (im)^2 (il_1)^2$. Wir hatten nun $(il_1)^2 i_x^2 = \frac{1}{2} (m\alpha) m_x \alpha_x$
 $- (h\alpha)^2 h_x^2$, woraus: $(il_1)^2 (im)^2 = \frac{1}{2} (m\alpha) (mm') (am') - (h\alpha)^2 (hm)^2$. Der erste Term
 rechts verschwindet, der zweite ergibt sich aus der Polare: $(il) i_x l_x l_y^2 = h_x^2 h_y^2 - \frac{1}{2} (xy) m_x m_y$,
 wenn wir in dieser die y durch m ersetzen: $(il) (im)^2 i_x l_x = (hm)^2 h_x^2$. Da der Term rechts μ
 ist, so erhalten wir endlich: $(hm)^2 (h\alpha)^2 = \mu_2$ und $(nl_1)^2 = -\mu_2$.

Zur schließlichen Bestimmung von C_{003} haben wir nach den leicht zu bildenden Ausdruck von
 C_{021} hinzuzufügen. Es ist $(al_1)^2 a_x^4 = (al) (aa) (la) a_x^4$ und $(la) a_x^4 a_y l_y = -r_x^4 r_y^2$
 $- \frac{2}{3} (xy) g_x^3 g_y$; ersetzen in der Polare y durch α , so erhalten wir: $(la) (aa) (al) a_x^4 = - (r\alpha)^2 r_x^4$
 $+ \frac{2}{3} (g\alpha) g_x^3 \alpha_x$. Schieben wir noch einmal über $\alpha_x^2 \cdot \beta_x^2$, so ergibt sich, da der Term links
 $= (l_1 a)^2 a_x^4$, $(al_1)^2 (aa)^2 (a\beta)^2 = E_{021} = -r_6 + \frac{2}{3} (g\alpha) (g\beta)^2 (g\gamma) (\alpha\gamma)$. Da der 2. Term
 rechts verschwindet, so wird endlich: $C_{021} = -r_6$. Führen wir die gefundenen Werthe in den
 obigen Ausdruck für C_{003} ein, so ergibt sich: $C_{003} = -K_4 \cdot l_2 - \frac{1}{2} (2 C + \frac{AB}{3}) - \frac{1}{2} (\frac{A}{3} \nu_2 - 2 \mu_2)$.
 Tragen wir endlich die so gefundenen Werthe von $C_{\mu \nu \rho}$ ein und ordnen nach Potenzen von l , q und l_1 ,
 so erhalten wir $a_{x6} = f$ bis auf einen Nenner (die 3. Potenz von $(A_{II} E - l_2)$) als rationale
 und ganze Function der quadratischen Covarianten q , l , l_1 und gewisser Invarianten des Systems
 ausgedrückt.

Schulnachrichten.

Der Lehrplan des Gymnasiums ist in dem vergangenen Schuljahr 1873/74 ohne wesentliche Störung durchgeführt worden, nur ist Herr Winter seit Neujahr 1874 auf seinen Wunsch eines Theils seiner Pflichten auf eine Zeitlang entbunden und von den Kollegen für diesen Theil vertreten worden. Den Religionsunterricht für die vier oberen Klassen und das Hebräische für Prima hat derselbe beibehalten. Eine Veränderung des Lehrplanes hat in sofern stattgefunden, als auf Wunsch der vorgesetzten Behörde mit voller Uebereinstimmung der Lehrer die beiden Stunden englischen Unterrichts in Quarta in Wegfall gekommen und durch Unterricht in der Botanik, resp. in der Zoologie ersetzt sind. Der Bestand des Lehrercollegiums ist unverändert und bilden dasselbe außer dem Referenten die Herren Prof. Dr. Bernhardt, Oberl. Lindemann und Oberl. Dr. Grabow, die ordentlichen Lehrer Dr. v. Gall, Uhmeyer, Bussé, Religionslehrer Winter und Candidat des höheren Schulamts Held, sowie der Lehrer der Vorschule Dreimann.

Prima 32 St.

Ordinarius: Gymnasialdirector Prof. Dr. Steusloff.

Latein 8 St. Im Sommer Cicero Tuscul. L. I. und II. bis cap. 17. Im Winter Tacit., Agricola u. Germania bis cap. 32. Exercitien, Extemporalien, Aufsätze. Cic. Epp. nach Klotz Auswahl 1. Bd. Bernhardt.

Thematà der latein. Aufsätze:

- 1) Privatus illis census erat brevis, Commune magnum (Horat.)
- 2) Homerus quid virtus et quid sapientia possit, utile proposuit nobis exemplar Ulixen.
- 3) Opportuna morte nihil exoptatius.
- 4) De Caesaris rebus gestis brevis narratio.
- 5) Scriptorum antiquorum de inventa navigatione querelae quam causam et originem habent?
- 6) Quae utilitas ex inimicis capienda sit docetur.
- 7) Pyrrhus Epirotes num cum Alexandro Magno comparari videtur posse?
- 8) Marcellus Ciceroni respondet.
- 9) Bellum omnium rerum parens.
- 10) Aliensis et Chaeroneensis dies atri.

Horaz 2 St. Im Sommer Satiren und Episteln, im Winter Oden. Mehrere Oden wurden memorirt. Uhmeyer.

Griechisch 6 St. Platos' Phaedo und Besprechung der griechischen Philosophie bis Sokrates. Von Weihnachten ab Thucydides I, 24—50. 2 St. — Euripides' Medea bis Weihnachten 2 St. — Homeri Ilias 2—6 und Besprechung der Entstehung des Epos und Homerischer Realien 1 St. bis Weihnachten, von da ab 2 St. — Uebersetzungen aus dem Deutschen ins Griechische nach Böhm, Tempus- und Moduslehre, Exercitia und Extemporalia 1 St. Steusloff.

Deutsch 3 St. Lessings Laokoon I—XVII. Gelegentliche Wiederholungen des vorjährigen Cursums in der philosophischen Propädeutik. Deutsche Literaturgeschichte nach Kurz, Zeitraum 5, 6, 7 und Besprechung maßgebender literargeschichtlicher Begriffe. Steusloff.

Thematà der deutschen Aufsätze:

- (Vom vorigen Jahre noch übernommen): 1. Uebersetzung und Erläuterung der Parodos in Aeschylus' Agamemnon (vorher genau besprochen). 2. a. Was verstehen wir unter Literaturgeschichte?
b. Worin besteht die tragische Schuld Don Caesars in der „Braut von Messina“ und durfte er den Bitten seiner Mutter und Schwester folgend seines Lebens schonen? 3. In wiefern gelten

die Worte Iphigeniens „Und an dem Ufer steh' ich lange Tage, das Land der Griechen mit der Seele suchend“ auch für uns? 4. Ist es ein begründeter Vorwurf oder überhaupt ein Vorwurf, wenn Ismene zur Antigone sagt: „Θεμὴν ἐπὶ ψυχροῖσι καρδίαν ἔχεις“? 5. Was meint Lasso mit den Worten: Und, wenn der Mensch in seiner Dual verstummt, Gab mir ein Gott zu sagen, wie ich leide. 6. Eignet sich die Gestalt Hermanns als Sinnbild der deutschen Einheit? 7. Welche Gestalt in der Gudrun spricht mich am Meisten an? 8. Aber, wer fest auf dem Sinne beharrt, der bildet die Welt sich. Nicht dem Deutschen geziemt es, die fürchterliche Bewegung fortzuleiten und auch zu wanken hierhin und dorthin. (Hermann und Dorothea). (Abituriententhemata.)

Themata der freien Vorträge:

1. Der Parcival. 2. Streit zwischen Arius und Athanasius. 3. Heinrich IV. von Frankreich. 4. Der Hainbund. 5. Die englische Revolution. 6. Der Einfluß Spitzens auf die deutsche Literatur. 7. Walter von der Vogelweide. 8. Heinrich I. von Deutschland. 9. Die Akropolis von Athen. 10. Der Golfstrom. 11. Allgemeine Topographie von Rom. 12. Entstehung des Volksepos. 13. Züge Alexanders des Großen. 14. Der Streit zwischen Bodmer und Gottsched. 15. Die Hypothese des La Place. 16. Der Freiheitskampf Griechenlands von 1821—1828. 17. Beschreibung einer Reise nach Lothringen. 18. Geographie des alten Griechenlands. 19. Beschreibung des Lippischen Landes. 20. Biographie Gellerts. 21. Biographie Gleims. 22. Die Frithjofsage. 23. Die griechischen Säulenordnungen. 24. Die Fassade des Parthenon. 25. Otto der Große. 26. Der große Kurfürst. 27. Anlage der „Glocke“. 28. Ist die Scene mit Johann Parricida im „Tell“ gerechtfertigt? 29. Biographie Beethovens. 30. Einfluß Klopstocks auf die deutsche Nationalliteratur. 31. Ueber das deutsche Volkslied. 32. Streit Gregors VII. mit Heinrich IV. von Deutschland. 33. Die Blüthezeit Babylons unter Nebukadnezar. 34. Welche Umstände bewirkten das Ende des siebenjährigen Krieges? 35. Die Sachsenkriege Karls des Großen. 36. Biographie Wielands. 37. Uebersicht über den Inhalt des Phaëdo. 38. Der große Kurfürst. 39. In den Ozean schiffst mit tausend Rasten der Jüngling u. s. w. 40. Die tragische Schuld der Jungfrau von Orleans. 41. Wer einen Freund besitzt, ist ihn zu finden werth u. s. w. 42. *Πάρε μάρδος*. 43. Die Freundschaft Schillers und Göttes.

Französisch 2 St. Gr. Ploetz Lec. 70 bis zu Ende. Repetition. 1 Thème aus den zusammenhängenden Stücken von Vertram. Alle 14 Tage Extemporale. Lect. Horace p. Corneille u. Tartuffe par Molière. Lindemann.

Englisch 2 St. Aus dem Deutschen ins Englische: Der Parasit von Schiller u. Hochzeitsreise von Benedix. Aus dem Englischen ins Deutsche Henry V. und King Lear. — Act II von Shakespeare. Lindemann.

Religionslehre 2 St. Neuere Kirchengeschichte nach Hollenberg's Hülfsbuche. Der Brief an die Galater wurde bis Kap. 4 gelesen. Repetition. Winter.

Hebräisch anfangs 2 dann 1 St. Uebersetzt wurden Lesestück I bis XV des Elementarbuches von Seffer. — Grammatik: die Nominallehre nach Seffer 64—94. Gelegentlich Abschnitte aus der Syntax. Schriftliche Aufgaben. Winter.

Geschichte und Geographie 3 St. Neuere Geschichte seit dem Tode Karls des V. bis 1870. — Wöchentlich 1 Stunde Repetition, abwechselnd Geschichte und Geographie von Europa. Bernhardt.

Mathematik 4 St. Im Sommerhalbjahr Stereometrie, im Winterhalbjahr Trigonometrie. Alle 4 Wochen ein Exercitium. v. Gall.

Themata zu den Abiturienten-Arbeiten:

1. Zwischen die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks eine gegebene Strecke so zu legen daß sie, durch die Hypotenuse halbt wird. 2. $\sqrt{\frac{4x-3y}{2x}} + \sqrt{\frac{2x}{4x-3y}} = 2$; $x^2 + 15 = (y-6)x$.

3) Ein Dreieck zu berechnen aus einer Seite $c = 624$, der Differenz der anderen $a - b = 240$, und der Differenz der Gegenwinkel $\alpha - \beta = 13^\circ 21' 31''$. 4) Aus einem eiserne, durch Rotation eines gleichseitigen Dreiecks um seine Höhe h entstandenen Kegel wird die größtmögliche Kugel gedreht, der Rest aber wieder in die Form einer Kugel gegossen. Wie groß wird der Radius und der Inhalt beider Kugeln sein, wenn $h = 6$ ist?

Physik 2 St. Im Sommer galvanische Electricität; im Winterhalbjahr Optik. v. Gall.
Zeichnen 1 St.

Secunda 32 St.

Ordinarius: Professor Dr. Bernhardt.

Latın 9 St. Im Sommer Cic. in Verr. Act. II 4—§ 48. Im Winter Liv. XXI, 26 bis zu Ende. Cursorisch Caes. de bell. civ. I. Mündliches Uebersetzen und Exercitien aus Seyffert Mater. 2 St. Gramm. nach Berger, Satzlehre, Retroversionen, Extemporalien 1 St. Steußloff. Virgil. Im Sommer lib. I. Im Winter lib. II. 2 St. Held.

Griechisch 6 St. Profaiter, im Sommersemester: Lysias Rede gegen Crasthenes. Im Wintersemester: Herodot lib. VII. cap. 175. 201. bis Schluß. lib. VIII. cap. 49—93. Syntax. Exercitien und Extemporalien. Bernhardt.

Dichter, 2 St. Odyssee lib. IV—XI. incl. Grabow.

Deutsch 2 St. Im Sommersemester Lectüre: Wilhelm Tell, im Wintersem. Braut von Messina. Im Sommersemester Poetik, im Wintersemester Rhetorik. Außerdem freie Vorträge und Declamationen. Aufsätze. Bernhardt.

Themata der deutschen Aufsätze:

1. Wilhelm Tell und Parricida. 2. Vergleichung zwischen Stadt u. Landleben. 3. Die Kraniche des Ibykus, „Arion“, des Sängers Fluch. 4. Walter Fürst, Werner Stauffacher, Arnold Melchthal. 5. Was ist für, was gegen die spartanische Verfassung zu sagen. 6. Don Manuel und Don Cesar. 7. Dem Fleiße reifen goldene Saaten (Chrie). 8. Hat Demaratus dem Xerxes den Gang der Ereignisse im persischen Kriege in allen Punkten richtig vorausgesagt (Herod. lib. VII. cap. 236)? 9. Fortes fortuna adjuvat (Chrie). 10. Das Leben ist kurz, spricht der Weise, spricht der Thor. 11. Die Schlacht von Chäroneia, ihre Ursachen, ihre Folgen.

Französisch 2 St. Gramm. Plöy leg. 39—74. Wöchentlich ein Thema aus Vertram. Lect. Phédre par Racine, Cinna p. Corneille — Act. III. Lindemann.

Englisch 2 St. Gramm. Schmidt Elementargr. § 21 bis zu E. Ascher Übungsbuch Nr. 18. Exercitien wöchentlich. Lect. Macaulay 1. Band S. 189—241. Lindemann.

Religionslehre 2 St. Das neue Testament nach Hollenberg bis § 82. Repetition von Kirchenliedern. Winter.

Hebräisch. Anfangs 2, dann seit Neujahr 1 St. Bis Neujahr: 1. Abtheil. Gramm. u. Uebersetzen nach Seffer § 1—20. 2. Abthl. § 33—45. Schriftliche Aufgaben. Winter. Von Neujahr bis Ostern 2. Classe: Wiederholung der Laut- u. Formenlehre bis zum starken Verbo incl. Bernhardt.

Geschichte u. Geographie 3 St. Orientalische und griechische Geschichte. Geographische und geschichtliche Repetitionen. Bernhardt.

Mathematik 4 St. Die ebene Geometrie wurde beendet. In der allgemeinen Arithmetik wurde die Lehre von den Potenzen, Wurzeln, Logarithmen und Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten durchgenommenen. Alle 4 Wochen ein Exercitium. v. Gall.

Physik 2 St. Lehre von den festen Körpern. v. Gall. — **Zeichnen** 1 St.

Realklasse VI. Stunden. Geometrie und Physik 3 St. v. Gall. Französisch 2 und Englisch 1 St. Lindemann.

Tertia 32 St.

Ordinarius: Oberlehrer Dr. Grabow.

Latın 10 St. Caes. de bell. Gall. V—VI übersetzt und retrovertirt. Grammatik nach Ferd. Schults, im Anschluß daran mündliches Uebersetzen aus dem Spieß für Tertia. Wöchentliche Exercitien oder Extemporalien 8 St. Grabow. — Ovid. Metamorph. I, 1—451, VIII. 260—545, VIII. 611—725. 2 St. Held.

Griechisch 6 St. Xenoph. anab. II. 5 bis III. 1 incl. Erste Abthl. der Klasse: Repetition der

der Verba auf *ui*. Verba anomala, Gramm. nach Krüger § 36—40 incl. — Zweite Abtheilung: Repetition der Declination und der Conjugation der Verba auf *o*. Verba auf *ui* Krüger § 14—37 incl. Wöchentlich ein Exercitium aus dem Übungsbuch von Spieß-Breiter. Extemporalien. Uhmeyer.

Deutsch 2 St. Syntax des zusammengesetzten Satzes. Interpunktionslehre. Dispositionsübungen im Anschluß an das Lesebuch von Hopf und Paulsief. Erklärung Schillerscher Dichtungen. Declamationsübungen. Alle drei Wochen ein Aufsatz. Grabow.

Französisch 2 St. Grammatik nach Plösz leg. 1—39. Wöchentl. ein Exercitium nach Vertrams Übungsbuche Th. 1. u. 2. Lect. aus Lüdeking. Lindemann.

Englisch 2 St. Schmidts Elementargramm. § 1—15. Wöchentlich ein Exercitium. Lect. aus Helms „Seven Tales of English and American History“. Lindemann.

Religionslehre 2 St. Lectüre des alten Testaments nach Hollenberg § 1—44. Kirchenlieder u. Psalmen, theils neu erlernt, theils repetirt. Winter.

Geschichte u. Geographie 3 St. Mittlere, neuere und neueste Geschichte nach Pütz. — Allgem. Geographie von Europa und speciell von Deutschland nach Daniel. Lindemann.

Mathematik 3 St. Ebene Geometrie bis zur Lehre von der Gleichsichtigkeit incl. nach Rambly, die vier Grundoperationen mit allgemeinen Zahlen, Decimalbrüche nach Heiß. Alle 3 bis 4 Wochen eine Arbeit. v. Gall.

Physik 2 St. Sommer: Botanik, Systemkunde und Bestimmen von Pflanzen. — Winter: Lehre vom menschlichen Körper. v. Gall.

Zeichnen 1 St. Freihandzeichnen nach Vorlagen. v. Gall.

Quarta. 30 St.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Uhmeyer.

Latein 10 St. Corn. Nepos XXV. 1—6 incl. (5 St.) Casuslehre nach der Grammatik von Schulz. Mündliche Uebersetzungen aus Spieß. Exercitien aus demselben Buche alle 14 Tage. Extemporalien aus Oftermann's Übungsbuch, ebenf. alle 14 Tage. Vocabela nach Oftermann. Uhmeyer.

Griechisch 4 St. Die regelmäßige Formenlehre excl. der Verba auf *ui* nach Krüger. Vocabela und Uebersetzen nach Spieß-Breiter. Exercitia und Extemporalia. Held.

Deutsch 2 St. Satz- und Interpunktionslehre nach Hopf u. Paulsief. Alle 14 Tage ein Aufsatz. Ein Theil der Schillerschen Balladen wurde auswendig gelernt. Held.

Französisch 2 St. Plösz Elementargr. leg. 61 bis zu Ende. Wöchentlich ein Exercitium. Extemporalien. Von Ostern bis Neujahr 1873 Winter, von da bis Ostern 1874 Held.

Religionslehre 2 St. Katechismus: I. Hauptstück und Art. 1 und 2. des II. Hauptstückes. Die Bergpredigt und die wichtigsten Kirchenlieder wurden gelesen und memorirt. Eintheilung der heil. Schrift und ihrer Bücher. Winter.

Geschichte und Geographie 3 St. Im Sommer griechische, im Winter römische Geschichte. Natürliche und politische Geographie von Deutschland. Lindemann.

Mathematik 3 St. Planimetrie bis zur Lehre von den Vierecken nach Rambly § 1—70. Uhmeyer.

Naturgeschichte 2 St. Im Sommer Botanik im Winter Zoologie: Beschreibung einzelner Arten und Gattungskunde. v. Gall.

Rechnen 1 St. Buisse.

Zeichnen 1 St. Nach Vorlagen. v. Gall.

Quinta. 29 St.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Buisse.

Latein 9 St. Formenlehre nach Schulz lat. Gramm. Spieß Übungsb. für Quinta pag. 1—104. Wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale. Grabow.

Deutsch 2 St. Lesen und Erzählen. Declamation gelernter Gedichte nach Hopf und Paulsiek. Lehre vom einfachen und zusammengesetzten Satze, sowie von der Interpunction. Wöchentl. ein Aufsatz. Bussé.

Religionslehre 2 St. Die Geschichte des neuen Testaments nach Zahn. Kirchenlieder. Erstes Hauptstück des Katechismus. Bibelsprüche. Bis Weihnachten Winter; seit Neujahr Grabow.

Geographie 3 St. Im Sommer: Asien, Afrika, Australien, Süd-Amerika. Im Winter: Mittel- und Nord-Amerika und Europa mit Ausschluß von Deutschland. Held.

Französisch 3 St. Plötz Elementargrammatik leg. 1—60. Lindemann.

Rechnen 3 St. Kopf- u. Tafelrechnen nach Kranke. Wiederholung der Brüche, Decimalbrüche, Verhältnißregel, Kettenregel. Bussé.

Naturkunde 3 St. Im Sommer Botanik, im Winter Zoologie. Vergleichen und Unterscheiden von Pflanzen und Thierarten. Bussé.

Zeichnen 1 St. Bussé.

Schreiben 2 St. Dreimann.

Sexta. 29 St.

Ordinarius: Schulamtsandidat Held.

Lattein 9 St. Die regelm. Formenlehre nach der kleinen lat. Sprachlehre von Schulz. Vocabeln und Uebersetzen nach Spieß für Sexta. Wöchentlich ein Extemporale. Held.

Deutsch 4 St. Lesen und Besprechen der Lesestücke nach Hopf und Paulsiek. Wortlehre, Lehre vom einfachen Satze. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit und ein Gedicht. Bussé.

Religionslehre 3 St. Die Geschichte des alten Testaments. Das erste Hauptstück, leichte Bibelsprüche und 6 Gesänge. Bussé.

Geographie 3 St. Bis Weihnachten: Math. Geographie, Asien, Afrika und Europa mit Ausnahme Deutschlands (Daniel S. 1—33) Winter. Von Weihnachten an: Deutschland, Amerika, Australien. Uhmeyer.

Rechnen 3 St. Kopf- u. Tafelrechnen, Wiederholung der 4 Species, darauf Bruchrechnen. Bussé.

Naturkunde 3 St. Im Sommer Botanik, im Winter Zoologie. Betrachten einzelner Pflanzen- und Thierarten. Bussé.

Zeichnen 2 St. Bussé.

Schreiben 2 St. Dreimann.

Vorschule.

Lehrer Dreimann.

Die Vorschule ist in drei Abtheilungen getheilt und hat dreijährigen Cursus, so daß auf jede Abtheil. ein Jahr gerechnet ist. Es werden Schüler nach dem vollendeten 6ten Lebensjahre, am liebsten zu Ostern oder zu Michaelis aufgenommen. Dieselben sind, wie alle anderen Schüler, vor ihrer Aufnahme beim Director zu melden.

Erste Abtheilung 23 Stunden.

Religion 2 St.: Biblische Geschichten, Sprüche und Liederverse nach Ranke. — **Deutsch** 11 St: a. Sprachlehre: Die Wortarten, der einfache Satz und die Hauptregeln der Orthographie nach Bohm und Steinert. Die Beugung des Hauptwortes wurde besonders berücksichtigt. 2 St. b. Aufsatzübungen vorzugsweise nach dem Hilfsbuche für den schriftlichen Gedankenausdruck von Petermann, 2 St. c. Lesen und Deklamiren nach Hopf und Paulsiek. 7 St. — **Schreiben** 3 St.: das deutsche und lateinische Alphabet. — **Rechnen** 5 St: die vier Species mit mehrfach benannten Zahlen nach Kranke. — **Anschauungsunterricht** 2 St.

Zweite Abtheil. 23 Stunden.

Religion 2 St. mit I. comb. — **Deutsch** 11 St. Gramm. 2 St. mit I. comb. b. Aufsätze 2 St. nach Petermann. c. Lesen und Deklamiren 7 St. mit I. comb. — **Schreiben** 3 St.,

das kleine und das große deutsche Alphabet. — Rechnen 5 St.; die vier Species mit unbenannten Zahlen nach Krante. — Anschauungsunterricht 2 St.

Dritte Abtheilung.

Lesen und Schreiben nach der ersten und zweiten Handschrift von Fir. — Rechnen 5 St. im Zahlengebiete von 1—100 (vorzugsweise Kopfrechnen). — Anschauungsunterricht 2 St.

Turnen.

Director Dr. Steusloff.

Der Turnunterricht ist für alle Schüler obligatorisch, die nicht ein ärztliches Zeugniß beibringen, nach welchem sie wegen körperlicher Fehler für eine Zeitlang oder für immer davon befreit werden können. — Es haben am Turnen alle Schüler außer vier für immer dispensirten Theil genommen, doch ist zeitweise Versäumniß des Unterrichtes im vergangenen Schuljahre mehr als sonst vorgekommen. — Abtheil. I. wurde im Sommer vielfach mit Stab-, Hantel- u. den schwierigeren Freiübungen beschäftigt, bei schlechtem Wetter und im Winter wurde in der Turnhalle zu jeder Stunde eine Gruppe Freiübungen mit Uebungen an je 2 Geräthen für je eine Riege verbunden. Eine Stunde wurde im Fechten unterrichtet, die Betheiligung hieran war freiwillig. (Prima, Secunda und der dritte Theil von Tertia). — Abtheil. II.: Im Sommer Marsch-, Ordnungs-, mannigfache Arten von Freiübungen, Stabübungen meist im Freien, im Winter je eine Gruppe von Freiübungen und von Uebungen an Geräthen, (der Rest von Tertia, Quarta und ein Theil von Quinta). — Abtheil. III.: Ordnungs-, Marsch- u. leichte Freiübungen, an Geräthen wurde nur selten geturnt, (der Rest von Quinta, und die Serta.)

Gesang 4 Stunden.

Gesanglehrer Horst.

Zwei Stunden wurden für die unteren Klassen bis Quarta incl. zu Uebungen im Notenlesen, Treffübungen und zur Einübung von Chorälen benutzt, 1 St. fiel dem Gesang der oberen Klassen, 1 St. dem Chorgesang zu. Eingeeübt sind kleinere Lieder, Motetten, Choräle und „der Frühling“ von Haydn.

Verfügungen und Anordnungen.

Wie seit dem vorigen Jahre, wird das Schulgeld vierteljährlich praen. während der ersten beiden Stunden des beginnenden Vierteljahrs in dem Gymnasialgebäude an den Magistratsdiener entrichtet. Gleichzeitig werden von jedem Schüler 3 *gr* Bibliotheksgeld für das laufende Vierteljahr im Voraus entrichtet. Von den Vorschülern sind nur diejenigen hierzu verpflichtet, welche die Bibliothek benutzen.

Der Director erklärt wiederholt, daß Inscriptionsgebühren und Gebühren für die Prüfungen aufzunehmender Schüler nicht zu entrichten sind, ebenso wenig für ertheilte Auskunft über einen Schüler, für Zeugnisse und dergl. Nur für Abgangszeugnisse werden 10 *gr* berechnet, für Abiturientenzeugnisse von jetzt ab 1 *fl*. Beides fällt Schulzwecken zu. Ausdrücklich wird hervorgehoben, daß freiwillige Remunerationen für Aufnahmeprüfungen ohne Ausnahme zurückgewiesen werden.

Die geehrten Eltern oder Vormünder unserer Schüler werden gebeten, falls sie dieselben von der Schule abgehen zu lassen wünschen, deren Abgang anzuzeigen. Falls solche Schüler die Schule nach Beginn eines Vierteljahrs besucht haben, sind sie verpflichtet, das Schulgeld für dasselbe noch zu entrichten. Haben abgegangene Schüler ihren Abgang nicht angezeigt und fordern sie mehr als 4 Wochen später ein Abgangszeugniß, so wird für dasselbe ein Preis von 2 *fl* berechnet.

Schülern der Untertertia, Untersecunda und Unterprima, die zur höheren Stufe derselben Klassen, also Overtertia u. s. w. zu Ostern des Jahres nicht befördert worden sind, und deren Eltern wird hiermit eröffnet, daß Erstere durch vermehrte Anstrengung während des Sommersemesters sich diese Beförderung zu Michaelis verdienen und somit bei entsprechenden Leistungen zu Ostern 1875 in die nächsthöhere Klasse versetzt werden können.

Der Cursus für Serta, Quinta, Quarta ist einjährig, für jede der drei oberen Klassen zweijährig. Hiervon kann nur in ganz besonderen Ausnahmefällen dann abgegangen werden, wenn zu sehr vorgerücktes Alter mit guten Leistungen verbunden ist oder ganz hervorragende Leistungen auftreten.

Auf Anordnung der Hochfürstl. Regierung soll der Geburtstag Sr. Majestät des deutschen Kaisers auch von Seiten des Gymnasiums festlich begangen werden.

Chronik der Anstalt.

Er. Durchlaucht der Fürst haben gnädigst geruht, dem Oberlehrer Dr. Bernhardt und dem Referenten den Titel „Professor“ zu verleihen.

Ihre Durchlaucht, die Prinzessin und Nebtiffin Luise zur Lippe beehrte mit gewohnter Herablassung auch im verflossenen Jahre die Schalexamina mit Dero Gegenwart.

Der Geburtstags Er. Durchlaucht des Fürsten am 1. September wurde von Seiten der Schule durch eine Ansprache des Referenten und Gesang der Schüler festlich begangen.

Der Geburtstag Sr. Majestät des Kaisers wurde am Montag dem 23. März durch eine Rede des Herrn Gymnasiallehrer Uhmeyer, durch eine Ansprache des Directors und Gesänge der Schüler gefeiert.

Die diesjährige Turnfahrt fand in der Woche vor Pfingsten unter Betheiligung von 6 Lehrern und 71 Schülern statt. Den ersten Tag marschirte die Schaar von Lemgo über Blotho nach Deynhausen, den zweiten unter Benützung der Eisenbahn nach Bad Rehburg, an dritten erreichten wir Hagenburg am Steinhuder See und besahen da Fort Wilhelmstein, wurden aber dabei von schwerem Regenwetter überrascht. Am Abend, kurz vor Ankunft in unserem Nachtquartier, der Bückeburger Kluse, wohin wir von Bückeburg aus, das wir von Wunstorf her auf der Eisenbahn erreicht hatten, unterwegs waren, überfiel uns ein wolkenbruchartiger Regenguß. Der Rückweg geschah über Minden u. Herford.

Das diesjährige Schulfest, ursprünglich bestimmt am 2ten September begangen zu werden, durfte mit Erlaubniß der Fürstl. Regierung am 5ten September stattfinden, da Musik am ersten Tage nicht zu beschaffen war. Am frühen Morgen zog von den Lehrern und manchen Freunden und Freundinnen der Schule begleitet, die Schülerschaar in ihrer Marschordnung mit Musik in den nahen Wald zum Steinmeierschen Gasthause. Hier hielt an überaus günstig gelegener, von lieblichem Walde umgebener Stelle Herr Held die Festrede, in der er die vaterländische Bedeutung des 2ten Septembers auf Grund eines geschichtlichen Rückblickes schwungvoll hervorhob. Am Nachmittage fand auf dem Lippehofe vor dem Gymnasialgebäude die Ueberreichung eines Geschenkes von Seiten vieler hiesigen Damen statt, für das wir hier unseren besonderen Dank auszusprechen uns gedrungen fühlen. Dem Referenten wurde für das Gymnasium durch die erwählte Sprecherin der Damen, die sich zahlreich und geschmückt eingefunden hatten, durch Fräulein L. Pott Hoff eine Fahne eingehändigt, wobei dieselbe ein Gedicht vortrug, in welchem sie auf die innere und äußere Bedeutung eines solchen Geschenkes für die Anstalt hinwies. Der Refer. begrüßte in seiner Antwort die Fahne als ein Zeichen des großen Interesses der Einwohner Lemgo's am Gedeihen der Anstalt und legte den Schülern ans Herz ein solches Sinnbild ihrer Ehre makellos zu erhalten. Nach dieser Feier gingen Jung und Alt mit der Fahne hinaus nach „Velle-Alliance“, wo der 2te Theil des Nachmittages unter Turnspielen, Gesang und Tanz der kleineren Schüler und Mädchen fröhlich vollbracht wurde. Eine patriotische Festrede hielt der Primaner Blankenburg. — Den Abend füllte ein — besonders festlich verlaufender — Ball, den die Schüler der oberen Klassen veranstaltet hatten, aus.

Den Preis der Overbeck'schen Stiftung für verhältnißmäßig gute Leistungen in den neueren Sprachen haben erhalten der Obersecundaner M. Lenzberg, der Untersecundaner Wesemann, der Obertertianer H. Lenzberg, der Untertertianer Hufemann, die Quartaner Kracht und Krügermeyer.

Das Capital der (aus Beiträgen der Lehrer und den Zinsen zusammenfließenden) Lehrerwitwenkasse deren Statuten das Programm von 1872 enthält, beträgt jetzt 162 Thlr. Ein Freund der Anstalt schenkte dieser Kasse 10 Thlr., wofür ihm hier herzlich gedankt wird.

Das Concert, welches unter Leitung des Herrn Horst die Schüler des Gymnasiums im November veranstaltet haben, und bei dem einige Schüler recht anerkennenswerthe Fertigkeit auf dem Klavier offenbarten, der Sängerkhor Motetten und den „Frühling“ von Haydn vortrug, lieferte einen Ertrag für Gymnasialzwecke von 35 Thlr. 17 Sgr. Dieser Ertrag ist größtentheils zur Deckung der Kosten der vorjährigen (deren Ertrag den Nothleidenden an der Ostsee ganz zugefallen ist) und der diesjährigen musikalischen Aufführung, sowie zur Anschaffung von Musikalien für den Gesangunterricht verwandt worden. Dem Herrn Horst gebührt für die mühevollen Vorbereitung und Leitung der wohlgelungenen Aufführung unser herzlichster Dank.

Für das **physikalische Cabinet** sind angeschafft: 1. Inductionsapparat nach Rumkorf mit Geisler'schen Röhre. Geschenk von Sanitätsrath Dr. Honerla. 2. Spectralapparat mit Vergleichs-

spectrum, 2 Bunsen'schen Lampen u. s. w. Geschenk von den Herren v. Kapf und Känter. 3. Apparat zur Bestimmung des Brechungsverhältnisses für Flüssigkeiten. 4. Neue Gewichtsstücke, Chemikalien u. dgl. Den freundlichen Gebern unseren herzlichsten Dank.

Für die **Gymnasialbibliothek** wurden angeschafft: Müller, Experimentalphysik; Wagner, Gräser; Wagner, Grassherbarium; Leunis, Synopsis; Brehm, Vögel; Krelle's Mathemat. Journal; Theol. Universallexikon; Stier, Heilsgeschichte des N. L.; Zeitschrift für Gymnasialw.; Centralblatt für Unterrichtswesen; Launig Wandtafeln; Generalstabsbericht über den deutsch-französisch. Krieg von 1870 Heft 3 und 4; 4 Hefte Vorlagen von Hermes.

Für die **Schülerbibliothek**: Neue Serien von Hoffmanns Jugendschriften; Der große Krieg und das deutsche Reich; Werke von Thetla Gumpert; Wilbermuth; Dielitz, Sigismund Rüstig, Bearbeitungen Cooper'scher Romane u. s. w.

An Geschenken erhielt die Gymnasialbibliothek eine Anzahl von Verlagswerken der Hahn'schen Hofbuchhandlung in Hannover, gegen die wir für Jahre lang bewährtes Interesse an unserer Anstalt herzlichsten Dank aussprechen.

Die Frequenz der Anstalt betrug

zu Ende des vorigen Jahres	zu Anfang des laufenden Jahres	zu Ende des laufenden Jahres	Auswärtige z. G. d. J. (d. h. nicht aus Lemgo stammende)	
in Oberprima	7	6	5	
„ Unterprima	5	5	5	darunter aus Brake
„ Obersecunda	12	10	7	
„ Untersecunda	19	21	14	1
„ Obertertia	15	15	4	—
„ Untertertia	32	28	20	3
„ Quarta	30	28	15	2
„ Quinta	39	40	18	3
„ Sexta	36	39	15	3
	178	195	103	12
Vorschule	50	43	45	
	228	238	237	

Abgegangen sind: 1. mit dem Zeugniß der Reife:

Zu Michaelis: der Oberprimaner Oscar Hovedissen geb. zu Plomberg, 19 1/4 Jahr alt, reformirter Confession, Sohn des Pastors Hrn. Hovedissen zu Lüdenhausen. Derselbe hat in Folge andauernder Krankheit, die ihn die Schule sehr lange zu versäumen zwang, der Prima mehr als 2 Jahre angehören müssen. Er studirt Medicin.

Zu Ostern die sechs Oberprimaner:

Karl Bierhoff aus Lüdenscheid, 18 1/4 Jahre alt, evangelischer Confession, Sohn des Lehrers Herrn Bierhoff in Lüdenscheid, 2 Jahre in Prima, will Medicin studiren.

Fritz Blankenburg aus Lemgo, 18 3/4 Jahre alt, lutherischer Confession, Sohn des Kürschnermeisters Herrn Blankenburg hier, 2 Jahre in Prima, will Philologie studiren.

Friedrich Bredenbreucker aus Hattingen, 21 3/4 Jahre alt, luth. Conf., Sohn des Kaufmanns Herrn Bredenbreucker in Hattingen, 2 Jahre in Prima, will Theologie studiren.

Wilhelm Kramberg aus Dortmund, 21 1/4 Jahr alt, evangelischer Conf., Sohn des Bäckermeisters Herrn Kramberg in Dortmund, 2 Jahre in Prima, will Bergfach studiren.

Johann Adolf Störing aus Esens in Ostfriesland, 19 1/2 Jahre alt, lutherischer Confession, Sohn des Auctionators Herrn Störing in Esens, 1 Jahr in der hiesigen, 1 Jahr in der Prima des Gymnasiums zu Jever, zwischen welchen Jahren er ein Jahr lang die Schule nicht besuchte, hat sich bis jetzt noch nicht für ein bestimmtes Fach entschieden.

Victor Weidtmann aus Elberfeld, 20 1/2 Jahre alt, katholischer Confession, Sohn des Rechtsanwaltes Herrn Weidtmann in Elberfeld, 2 Jahre in Prima, will Jura studiren.

Abgegangen sind während des verflossenen Schuljahres, resp. haben ihren Abgang gemeldet: Aus Obersecunda: Fritz Borchardt und Theodor Kellner, um sich dem Kaufmannsstande zu widmen, Alexander Rowebl, um Deconom zu werden. Aus Untersecunda: Andreas Petri, um auf eine andere Anstalt überzugehen. Aus Untertertia: August Rehmeyer, um Kaufmann, Ludwig Bröcker, um Apotheker, Karl Steinmeier, um Maurer zu werden. Abgegangen sind noch Karl Thoke aus Obertertia und aus Untertertia Gustav Kuhlmann, ohne ihren künftigen Beruf anzugeben. Aus Quarta: Siegmund Jacobsberg, um Kaufmann zu werden, Peter Müller, ohne seinen künftigen Beruf anzugeben. Aus Quinta sind abgegangen: Konrad Meyer, Wilhelm Brandt, Albert Volland, Hermann Lennhoff und für die nächste Zeit einer Krankheit wegen August Meier zu Dinglinghausen. Aus Sexta Albert Limprecht. Ein Schüler ist von der Anstalt verwiesen, einer mit Verweisung bedroht. Im Ganzen 18 Schüler.

Lehrbücher, die in der Anstalt gebraucht werden:

1. Für **Sexta**: Schulz, latein. Grammatik und Spieß, Übungsbuch für Sexta. — Hopf und Paulsief, deutsches Lesebuch. Grammatik von Fischer. — Zahn, Ausg. a. Kleines evangel. Gesangbuch. Für die Reformirten der Heidelberger Katechismus, für die Lutherischen der Lutherische von Gesenius. — Daniel, kleine Ausgabe der Geographie. — Kranke, Rechenbuch für Sexta.

2. Für **Quinta**: Schulz, lat. Grammatik. Spieß, Übungsbuch für Quinta. — Hopf und Paulsief, deutsch. Lesebuch. — Plöb, franz. Elementargramm. — Zahn, Ausg. a. Das kleine ev. Gesangbuch. Der Heidelberger und der Lutherische Katechismus. — Daniel, kleine, neueste Ausg. — Kranke für Quinta.

3. Für **Quarta**: Lat. Gramm. von Schulz. Spieß, Cursus für Quarta. Cornelius Nepos. — Krüger, griech. Schulgramm. Griech. Übungsbuch von Spieß-Breiter. — Deutsches Lesebuch von Hopf und Paulsief. — Schillers Gedichte — Plöb, Elementargramm. Bertram, Übungsbuch Thl. IV. — Leuniz, mittlere Synopsis der drei Reiche für Schulen. — Zahn, Ausg. a. Kleines evang. Gesangbuch. Der Heidelberger und der Lutherische Katechismus von Gesenius. — Pütz, Abriß der Geschichte für mittlere Klassen. — Daniel, neueste kleine Ausgabe. — Rambly, Mathematisches Lehrbuch. — Kranke, Rechenbuch für Quarta. Die Schüler haben sich ein brauchbares Reizzeug anzuschaffen.

4. Für **Tertia**: Lat. Gramm. v. Schulz. Spieß, Lat. Übungsbuch, Cursus für Tertia. Caesar de b. G. — Krüger Griech. Schulgramm. Spieß-Breiter Übungsbuch. Xenophon's Anabasis. — Deutsches Lesebuch von Hopf und Paulsief. — Schillers Gedichte. — Französische Schulgramm. v. Plöb und Lüdtke's Chrestomathie. Bertram's Übungsbuch III. — Englische Elementargramm. v. Schmidt und Helms, Seven tales of American history. — Hollenberg, Hülfsbuch für den Religionsunterricht. Kl. ev. Gesangbuch und der Katechismus. — Pütz, Abriß der Geschichte für mittlere Klassen. — Daniel, mittlere Ausgabe der Geographie. — Rambly, mathemat. Lehrbuch, Heis mathematisches Übungsbuch.

5. Für **Secunda**: Berger, lat. Gramm. Seyffert, Materialien zum Uebersetzen a. d. Deutsch. ins Lat. für Secunda. Im Sommer Cic. pro Roscio Amer. Im Winter Liv. lib. XXII. u. Caes. de bell. civ. Virgil. Aeneis. — Krügers Griech. Schulgrammatik und Böhme, Aufgaben zum Uebersetzen ins Griechische. Homer's Odyssee. Xenophons Hellenica, im Winter Herodot. Schillers Werke. Hebräische Grammatik v. Seffer. — Franz. Schulgramm. von Plöb. Cinna p. Corneille. Bertram's Übungsbuch II. — Macaulay's History. — Hollenberg, Hülfsbuch für den Religionsunterricht. Gesangbuch u. Katechismus. Novum Testamentum Graece. — Pütz, Abriß der Geschichte für obere Kl. — Rambly, mathem. Lehrbuch u. Heis Übungsb. — Logarithmentafel v. Bremker Gstellig. Englische Grammatik v. Schmidt I. Physikalische Lehrbuch von Brettnier, Aufgabenammlung von Burbach.

6. Für **Prima**: Berger, lat. Grammatik und Seyffert, Übungsbuch zum Uebersetzen f. Prima. Im Sommer Cic. de officiis und Cicero's Briefe. Im Winter Tacitus Annales und daneben Cicero. Im Sommer Horat. Satiren, im Winter Oden. — Griechische Schulgramm v. Krüger; Böhme, Aufg. zum Uebersetzen ins Griechische. Thucydides lib. I. Homer's Ilias. — Sophocles Ajas. — Lessings Laokoon. — Hebräische Grammatik v. Seffer. — Franz. Syntax von Plöb. Bertram Übungsbuch I. Britannicus p. Racine — Schmidt II. Engl. Gramm. Aus dem Deutschen ins Englische: Hochzeitsreise v. Benedix. — Hollenberg, Hülfsbuch für den Religionsunterricht. Nov. Test. Graece — Pütz, Abriß der Gesch. für obere Klassen. — Mathematisches Lehrbuch von Rambly und Heis Übungsb. — Logarithmentafel v. Bremker Gstellig. Physikalische Lehrbuch v. Brettnier und Aufgabenammlung von Burbach.

Die Klassiker werden nur nach Textausgaben gelesen. Die Schüler werden darauf aufmerksam gemacht, daß, um einem empfindlichen Uebelstande zu begegnen, sie nur noch die Atlanten v. Sydow in der neuesten Ausgabe anzuschaffen haben. Die geehrten Eltern werden gebeten, darauf zu sehen, daß nicht von anderen Schülern veraltete, oft unbrauchbare Ausgaben von Büchern eingehandelt werden. Jeder Schüler muß sich mit einem brauchbaren Reizzeuge und einem guten Lineale und Dreiecke versehen.

Uebersicht über Lehrer, Schüler und Lehrplan für das Schuljahr 1873—1874.

Lehrer.	Fächer.	Allgemeiner Lehrplan.						
		Klassen und Stunden.						Summe.
		I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
Director Dr. Steußloff.	Latein	8	9	10	10	9	9	55
Oberlehrer Dr. Bernhardt.	Griechisch	6	6	6	4			22
Oberlehrer Lindemann.	Hebräisch	(2)	(2)					(4)
Oberlehrer Dr. Grabow.	Deutsch	3	2	2	2	2	4	15
Oberlehrer Dr. Grabow.	Französisch	2	2	2	2	3		11
Ordentl. Lehrer Dr. v. Gall.	Englisch	2	2	2				6
Ordentl. Lehrer Ahmeyer.	Religionslehre	2	2	2	2	3	3	14
Ordentl. Lehrer Busse.	Geschichte	3	3	3	3			12
Candidat theol. Winter.	Geographie					3	3	6
Schulamtschadidat Held.	Mathematik	4	4	3	3			14
Lehrer d. Vorsch. Dreimann.	Rechnen				1	3	3	7
Gefanglehrer Horst.	Physik	2	2					4
	Naturgeschichte			2	2	3	3	10
	Zeichnen	(1)	(1)	1	1	2	2	6
	Turnen	3, 1 Facht			2		2	1
	Gefang	1			1	2		4
	Schreiben					2	2	4
		36	36	36	33	34	33	198
		2 Feb	2 Feb					u 4 Febr.

Turnen und Gefang sind bei der Gesamtzahl mitgerechnet.

Der neue Schulkursus beginnt am Montag dem 13. April. Zur Prüfung und Aufnahme neuer Zöglinge wird der Direktor am Freitag dem 10. und am Sonnabend dem 11. April Vormittags von 8 bis 12 Uhr in seiner Wohnung bereit sein.

Der Lektionsplan für das Schuljahr 1873—1874,
wie er bis Weihnachten durchgeführt ist.

Lehrer.	Dr- dina- riate.	I.	II.	II R. (m.III R. comb.)	III.	IV.	V.	VI.	Summa
Gymnasialdirektor Dr. Steußloff	I.	6 Griech. 3 Deutsch	7 Latein 8	Turnen in	allen Klas-	sen.			24
Oberlehrer Dr. Bernhardt.	II.	6 Latein. 3 Gesch.	4 Griech. 3 Gesch. 2 Deutsch						18
Oberlehrer Lindemann.		2 Franz. 2 Engl.	2 Franz. 2 Engl.	2 Franz. 1 Engl.	2 Franz. 2 Engl. 3 Gesch.	3 Gesch.			21
Oberlehrer Dr. Grabow.	III.		2 Homer		8 Latein 2 Deutsch		9 Latein		21
Ordentl. Lehrer Dr. v. Gall.		4 Math. 2 Physik (1 Zeich-	4 Math. 2 Physik nen)	2 Math. 1 Physik	3 Math. 2 Naturf. 1 Zeichnen	2 Naturf. 1 Zeichnen			25
Ordentl. Lehrer Uhmeier.	IV.	2 Horaz			6 Griech.	10 Latein 3 Mathem.			21
Ordentl. Lehrer. Busse.	V.					1 Rechnen.	2 Deutsch 3 Rechnen 3 Naturf.	4 Deutsch 3 Religion 3 Rechnen 3 Naturf. 2 Zeichnen	24
Religionslehrer. Winter.		2 Religion 2 Hebr.	2 Religion 2 Hebr.		2 Religion	2 Religion 2 Franz.	3 Franz. 3 Religion 1 Zeichnen	3 Geogr.	24
Schulamts-Cand. Held.	VI.		2 Vergil		2 Ovid	4 Griech. 2 Deutsch	3 Geogr.	9 Latein	22
Lehrer d. Vorschule Dreimann.							2 Schreiben	2 Schreiben	4
Gefanglehrer Hofst.				4	Gefang in	allen Klas-	sen.		201

